北京航空航天大学

2022－2023 学年

士嘉书院

第一学期期中考试复习模拟题讲解

《 工科数学分析（1） 》

前言

考虑到考前模拟题要尽力给每一位同学(无论你刚刚着手做往年题还是已经做完了所有的往年题）都带来一些收获。所以本套模拟题题目整体难度相较于以往的模拟题或者往年题都大了一些o(╥﹏╥)o，做起来会感觉些许卡壳，具体考试难度大家参考往年题目就可。

不过本套试题的题目都经过了学长的多次筛选，大部分题目思路都是非常经典的，在往年题目中都多有考察，我也会尽力写一份比较通俗易懂的答案供大家参考，积累方法(*^▽^*)。

建议大家看一下答案的内容，可能有的题目你算出来答案了，但是过程并不对。学长在一些题目中补充了“经典错法”。相信你在读完答案后会对往年题目或者数分有一个新的理解，做题会感到顺畅许多(^－^)V

本套试题也有些许的不足：题目大多是为了提升大家计算的能力。概念题，证明题出现的相对较少。大家也不必担心，因为贴心的学支部已经联系了讲师，为大家准备了以讲解课本定理为主的大型串讲活动，和本套题目形成了完美的互补，帮助大家完整的复习（或许还是预习呢，不是嘛嘿嘿）这半个学期的学习内容。

最后祝每一位学弟学妹期中都可以取得理想的成绩！

加油!

一.单项选择(每小题4分,共20分)

1. 当$x \to 0^+$时，将(1)$x(\cos\sqrt{x}-1)$,(2)$\sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$,(3)$\sqrt[3]{x+1}-1$,(4)$x-\sin x$的阶从低阶到高阶排列，正确的排序为（B）

A.（1）（2）（3）（4）　　B.（2）（3）（1）（4）

C.（2）（1）（3）（4）　　D.（3）（2）（1）（4）

这种题目的做法非常直接，就是利用等价替换将原式中的非多项式项等价替换为多项式项，直接就能看出阶的多少

(1)$x(\cos\sqrt{x}-1)$中将$(\cos\sqrt{x}-1)$项变为多项式项即可，利用等价替换

$\cos\sqrt{x}-1 \sim \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2=\frac{1}{2}x$

原式$\sim\frac{1}{2}x^2$,阶为2

(2)$\sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$中将$\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$项变为多项式项即可，利用等价替换

$\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sim\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

原式$\sim x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}$,阶为$\frac{5}{6}$

(3)$\sqrt[3]{x+1}-1$中将$\sqrt[3]{x+1}-1$项变为多项式项即可，利用等价替换

$\sqrt[3]{x+1}-1$为$A-1(A\to 1)$类型，利用$e^x-1\sim x$

$\sqrt[3]{x+1}-1=e^{\frac{1}{3}\ln(x+1)}-1\sim\frac{1}{3}\ln(x+1)\sim\frac{1}{3}x$

原式$\sim\frac{1}{3}x$,阶为1

(4)$x-\sin x$中将$\sin x$项变为多项式项即可，利用泰勒展开

$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$

大家记忆sinx, cosx泰勒展开时候有个技巧

sinx是奇函数，泰勒展开为$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$

这些地方都是奇数

cosx是偶函数，泰勒展开为$\cos x=0!-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-...+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$

这些地方都是偶数

原式$=x-\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right]=\frac{1}{3!}x^3-o(x^3)$

原式$\sim\frac{1}{3!}x^3$,阶为3

则阶从小到大排序为（2）（3）（1）（4）

变式： 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x^2}}-1}{\arctan x^2}=C\neq 0$，求 a, b 使 x → 0, $f(x)\sim ax^b$

首先我们需要知道$f(x)$是什么

我们要利用$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x^2}}-1}{\arctan x^2}=C\neq 0$把$f(x)$解出来

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x^2}}-1}{\arctan x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x^2}}-1}{x^2}=C$$

分子为$A-1(A\to 1)$类型$\sqrt{1+\frac{f(x)}{x^2}}-1=e^{\frac{1}{2}\ln(1+\frac{f(x)}{x^2})}-1\sim\frac{1}{2}\ln(1+\frac{f(x)}{x^2})\sim\frac{f(x)}{2x^2}$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{2x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x^4}=C$

去极限符号$\dfrac{f(x)}{2x^4}=C+o(1)\Rightarrow f(x)=2Cx^4+o(2x^4)$

那么$f(x)\sim 2Cx^4$

于是a=2C, b=4

2. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n}{n(n+1)}=$(C)

A．0 B.a

C．$\dfrac{a}{2}$ D. 不存在

这个题目就是一道往年题目啦

看到分子是数列 ka_k 求和的形式，当然第一下很容易就想到 stolz 定理咯，这样分子就只留下通项了。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n}{n(n+1)}\text{由}stolz\text{定理}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n(n+1)-(n-1)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2}=\frac{a}{2}$$

总结：当出现数列求和的时候使用 stolz 定理会大大简化极限运算

变式： 若$0<\lambda<1$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,求证$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+...+\lambda^n a_0)=\dfrac{a}{1-\lambda}$

根据 2 的经验，求极限部分很像数列的求和，应该是要用 stolz 定理的，但是仔细观察发现原式 $=\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda^{k}a_{n-k}$ 被求和的部分 k 和 n-k 不对应，因此我们先对原式做一下变形，之后再用 stolz 定理，这样思路就有了。

$$a_n+\lambda a_{n-1}+...+\lambda^n a_0=\sum_{k=0}^{n}\lambda^{k}a_{n-k}=\lambda^{n}\sum_{k=0}^{n}\lambda^{-(n-k)}a_{n-k}=\lambda^{n}\sum_{k=0}^{n}\lambda^{-k}a_k=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda^{-k}a_k}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n}$$

$$\text{由}stolz\text{定理}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda^{-k}a_k}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^{-n}a_n}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1-\lambda}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-\lambda}$$

3. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(ax+1),x\le 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n},x>0\end{cases}$，$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导，

则a，b等于（ C ）

A.-1,1

B.$\frac{1}{2},\ln 2$

C. $-1,\ln 2$

D. -1,1

我们先将$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}$化简一下，值得注意的是这里是关于n的极限，

求极限过程中要将x看作为确定的常数

但求完极限后n就没了，此时就是关于x的函数了

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-n\left(1+\frac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)}=e^{-n\frac{x^2+n(x+b)}{n^2}}=e^{-\frac{nx^2+n^2(x+b)}{n^2}}=e^{0-(x+b)}=e^{-(x+b)}$$

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(ax+1),x\le 0\\ e^{-(x+b)},x>0\end{cases}$，$f(x)$要在$(-\infty,+\infty)$内可导，只需要在$x=0$处可导即可

此时可以列两个方程：

①$f(x)$必然在$x=0$处连续：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，即$\lim\limits_{x\to0^+}e^{-(x+b)}=\frac{1}{2}$，即$e^{-b}=\frac{1}{2}$

则b=ln2

②$f(x)$在$x=0$处可导：$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)$，即$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{2}\left(e^{-x}\right)'=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{2}(ax+1)'$

即$\frac{1}{2}a=-1\Rightarrow a=-1$

4.设$f(0)=0$,下列四个选项中能确定$f(x)$在$x=0$处可导的是（B）

$A.\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{h}$存在

$B.\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$存在

$C.\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sinh)}{h^2}$存在

$D.\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$存在

关于可导这里，向我问题的学弟学妹非常多，所以出这样一道题目，顺便集

体解决下大家在可导这里的问题。大家可以先看问题讲解：

我们先回到定义：

函数$f(x)$在x_0处可导 $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$在x_0处有定义

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在 $=C$

我们由$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} C(x-x_0)=0$

知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 即$f(x)$在x_0处连续

所以$f(x)$在x_0处可导的前提条件是$f(x)$先要在x_0处连续

现在我们遇到了第一个问题：$f(x)$在x_0处可导只定义了x_0处的导数值，我们能否将这导数值推广到$f'(x)$在x_0的去心邻域内

也就是我们要讨论$f'(x_0)$和$f'(x_0\pm\delta)$ $(\delta>0)$间的关系

答案是不能推广

反例 $f(x)=\begin{cases}0 & x\in 有理数Q\\ x^2 & x\in 无理数 R/Q\end{cases}$

①当$x_0=0$时

$f'(x_0)=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0 & x\in Q\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0 & x\in R/Q\end{cases}$

此时 $f'(0)=0$

②当$x_0\neq 0$时

我们先来验证下$f(x)$的连续性

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} 0 & ,x\in Q\\ \lim\limits_{x\to x_0} x^2=x_0^2 & ,x\in R/Q\end{cases}$ 因为$x_0\neq 0$ 则$x_0^2\neq 0$ $f(x)$在x_0处不连续

$f(x)$在x_0处都不连续了，还说什么可导、导数值呢？

$\because f(x)=\begin{cases}0 & x\in Q \\ x^2 & x\in R/Q\end{cases}$ 仅在$x_0=0$处可导，在x_0的邻域内不可导

因此，一点的导数值$f'(x_0)$和它邻域内的导数值$f'(x_0\pm\delta)$ $\delta>0$没有必然联系

好！这个反例告诉我们：$f(x)$在x_0处可导甚至推不出$f(x)$在x_0的去心邻域内可导，因此$f'(x_0)$和$f'(x_0\pm\delta)$ $\delta>0$毫无联系。

那我们再加一个条件：$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内可导，即$f(x)$在x_0邻域内可导，此时我们可以得到的结论有：① $f'(x)$在x_0邻域$U_\delta(x_0)$内都有定义 ② $f(x)$在x_0邻域内连续 但$f'(x_0\pm\delta)$都等于$f'(x_0)$吗？

大家心里的答案都是否定的。因为我们现在只知道$f'(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义，万一我是一个点一个点给它离散定义的呢？那自然$\neq f'(x_0)$了

有这样一个反例：$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq0 \\ 0 & x=0\end{cases}$

~~$x\neq0$时~~ $x=0$时 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

但$x\neq0$时 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\underbrace{2x\sin\frac{1}{x}}_{\text{无穷小×有界=无穷小}}-\cos\frac{1}{x}$

我们再看$\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$

取$x=\frac{1}{2n\pi}$ $\lim\limits_{x=\frac{1}{2n\pi}\to0}\cos\frac{1}{x}=1$ 取$x=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $\lim\limits_{x=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to0}\cos\frac{1}{x}=0$

我们看：当$x=\frac{1}{2n\pi}$时 $f'(x)=-1\neq f'(0)$

$x=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$时 $f'(x)=0=f'(0)$

也就是说$f'(x_0)$和$f'(x_0\pm\delta)$ $\delta>0$还是没有联系

因为此时$\lim\limits_{x\to0}f'(x)$不存在，也就是$f'(x_0)\exists\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在

那它们什么时候才有联系呢？ 此问题的逆命题成立吗

当$f'(x)$在$U_\delta(x_0)$内连续时 $U_\delta(x_0)$内的每一个$f'(x)$才等于$f'(x_0)$

最后一个问题：$f(x)$在x_0处连续，$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在能推出$f'(x_0)$存在吗

终于得到一个肯定的答案了

已知：$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\text{洛必达}}{=}\lim\limits_{x\to x_0}f'(x_0)=A$

这个问题告诉了我们什么结论呢？

就是大家很熟悉的 $f(x)$在x_0处可导$\Leftarrow f(x)$的左右导数存在

4.设$f(0)=0$,下列四个选项中能确定$f(x)$在$x=0$处可导的是（）

这种题目就是凑导数定义，看导数定义是否存在

$A.\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-\cosh)}{h}$存在

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-\cosh)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-\cosh)-f(0)}{1-\cosh}\frac{1-\cosh}{h}=$(等价替换)$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-\cosh)-f(0)}{1-\cosh}\frac{\frac{h^2}{2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-\cosh)-f(0)}{1-\cosh}\frac{h}{2}$存在

能推出$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-\cosh)-f(0)}{1-\cosh}$存在吗？

当然不能呀,$\frac{f(1-\cosh)-f(0)}{1-\cosh}\frac{h}{2}$这里还是个无穷小量呢

即使$\frac{f(1-\cosh)-f(0)}{1-\cosh}$为无穷大的时候，这个式子极限依然有可能存在

$B.\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)}{h}$存在

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\frac{1-e^h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}$(等价替换)$\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\frac{-h}{h}=-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}$存在

并且注意到$h\to 0^+$时$1-e^h\to 0^-$；$h\to 0^-$时$1-e^h\to 0^+$，也就是左右导数都存在

那就可以判定$f(x)$在$x=0$处可导了(就是咱们讨论的最后一个问题)

$C.\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sinh)}{h^2}$存在

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sinh)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sinh)-f(0)}{h-\sinh}\frac{h-\sinh}{h^2}=$(等价替换)$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sinh)-f(0)}{h-\sinh}\frac{\frac{h^3}{6}}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sinh)-f(0)}{h-\sinh}\frac{h}{6}$存在

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sinh)-f(0)}{h-\sinh}\frac{h}{6}$存在能推出$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sinh)-f(0)}{h-\sinh}$存在吗？

当然不能，因为$\frac{h}{6}$为无穷小量，即使$\frac{f(h-\sinh)-f(0)}{h-\sinh}$无穷大时候,$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sinh)-f(0)}{h-\sinh}\frac{h}{6}$也可能存在

$D.\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}$存在

这个也是很常见的考法

首先告诉大家一个结论：要判定导数存在$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}$，两个括号内必须是“一动一静”的

如果出现两个括号内都是变量，就一定是推不出$f(x)$导数存在的

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)+f(0)-f(h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(2h)-f(0)}{2h}-\frac{1}{2}\frac{f(h)-f(0)}{h}\right)$存在

能推出$\frac{f(2h)-f(0)}{2h}$存在且$\frac{f(h)-f(0)}{h}$存在吗？当然不能

两项的和差极限存在，是不能推出两项的极限都存在的

$$5.f(x)=\begin{cases}x,x\le 0\\ \frac{1}{n},\frac{1}{n+1}\le x\le\frac{1}{n},n=1,2,...\end{cases}$$

则（D）

A.x=0是$f(x)$的第一类间断点

B.x=0是$f(x)$的第二类间断点

$C.f(x)$在$x=0$处连续但不可导

$D.f(x)$在$x=0$处可导

要讨论间断点类型（建议先看变式）

$f(x)$没有无定义点，直接讨论分段点就可

$f(x)$在$x=0$处为分段点

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{n}$，值得注意的是$x\to 0^+$时，$n\to +\infty$

那么$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{n}=0$

所以$f(x)$在$x=0$处连续

A,B都错

下讨论可导性：

左导数$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x-0}{x-0}=1$

右导数$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{n}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{n}x}$

$\frac{n}{n}<\frac{1}{\mathrm{n}x}<\frac{n+1}{n}$，根据夹逼定理知该极限为1

那么左导数$=$右导数，于是$f(x)$在$x=0$处可导

本题选D

变式：

讨论$f(x)$的连续性，指出间断点类型

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x(2x+\pi)}{2\cos x}, x\le 0 \\ \sin\frac{1}{x^2-1}, x>0 \end{cases}$$

这个题目主要是为了告诉大家分析间断点的思路：

①函数没有定义的点一定是间断点；

②分段点也可能出现间断点，要讨论其左右连续性

那么我们首先找没定义的点：

函数在x=1, x=-k$\pi-\dfrac{\pi}{2}$(k$\in$0，1, 2, . . .)处都没有定义，所以这些点都是间断点

在x=1处, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x^2-1}$不存在，所以$x=1$为第二类震荡间断点

在x=-k$\pi-\dfrac{\pi}{2}$(k$\in$1, 2, . . .)处（注意这里不能包含0），

$\lim\limits_{x\to -k\pi-\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to -k\pi-\frac{\pi}{2}}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}$=∞，所以$x=-k\pi-\dfrac{\pi}{2}$为第二类无穷间断点

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=-\dfrac{\pi}{2}$，所以$x=-\dfrac{\pi}{2}$为第一类可去间断点

我们再讨论函数的分段点x=0：

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\sin\dfrac{1}{x^2-1}=-\sin 1$

所以$x=0$为第一类跳跃间断点

小小函数却包含了全部类型的间断点，

还真是一个好的（折）模（磨）拟（你）题呢！！(bushi

二、 计算题

$$1.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1^2}+\frac{1+2}{n^3+2^2}+\ldots+\frac{1+2+\ldots+n}{n^3+n^2}\right)$$

这道题目，往年题里也考了很多，思路就是使用夹逼定理。我在这里给大家讲讲什么时候向看出来要使用夹逼定理求极限呢？

我们使用夹逼定理求极限往往放缩的是分母，便于我们进行求和。
那么我们将第一项和最后一项的分母取出来
如果我们发现，两者是等价的，
那么这个时候说明第一项的分母和最后一项分母差别并不大
此时我们就可以使用夹逼定理放缩了

如本题中：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1^2}+\frac{1+2}{n^3+2^2}+\ldots+\frac{1+2+\ldots+n}{n^3+n^2}\right)$

第一项分母为n^3+1^2，最后一项分母为n^3+n^2，$n^3+1^2\sim n^3+n^2$
那么这个时候，
我们将所有式子的分母都放缩为n^3+1^2和把所有项的分母都放缩为n^3+n^2
对原式的极限就没有影响

$$\frac{1}{n^3+n^2}+\frac{1+2}{n^3+n^2}+\ldots+\frac{1+2+\ldots+n}{n^3+n^2}① < \frac{1}{n^3+1^2}+\frac{1+2}{n^3+2^2}+\ldots+\frac{1+2+\ldots+n}{n^3+n^2} < \frac{1}{n^3+1^2}+\frac{1+2}{n^3+1^2}+\ldots+\frac{1+2+\ldots+n}{n^3+1^2}②$$

现在我们只需要将①，②极限都求出来，说明他们相等就可以了

①：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+n^2}+\frac{1+2}{n^3+n^2}+\ldots+\frac{1+2+\ldots+n}{n^3+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(1+2)+\ldots+(1+2+\ldots+n)}{n^3+n^2}$

现在遇到的问题是分子我们应该怎么化简呢？
我们发现每个括号内都是等差数列的求和，我们先将每个括号内的和求出来

1+2+...+k=$\frac{k(k+1)}{2}$，则

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1\bullet(1+1)}{2}+\frac{2\bullet(2+1)}{2}+\ldots+\left(\frac{n\bullet(n+1)}{2}\right)}{n^3+n^2}$$

现在分子我们又可以看成一个通项为$\frac{k\bullet(k+1)}{2}$的数列求和了

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}}{n^3+n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)}{n^3+n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2+k)}{n^3+n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2+\sum\limits_{k=1}^{n}k}{n^3+n^2}$$

由$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$$原式=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}{n^3+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{6\left(n^3+n^2\right)}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{6\left(n^3+n^2\right)}=\frac{1}{6}$$

在这个式子中我们发现分母部分是$\left(n^3+n^2\right)$还是$\left(n^3+1\right)$甚至是n^3对原式的极限是没有任何影响的
所以如果我们发现，两者是等价的，
那么这个时候说明第一项的分母和最后一项分母差别并不大
此时我们就可以使用夹逼定理放缩了
这句话还是很有道理滴！！

② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+1^2}+\frac{1+2}{n^3+1^2}+\ldots+\frac{1+2+\ldots+n}{n^3+1^2}$这一半过程和①一模一样
最后化简结果也就变了分母

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{6\left(n^3+1\right)}=\frac{1}{6}$

大家想回顾下刚才的过程的话可以自己推推
最后我们由①，②极限相等，由夹逼定理：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1^2}+\frac{1+2}{n^3+2^2}+\ldots+\frac{1+2+\ldots+n}{n^3+n^2}\right)=\frac{1}{6}$

最后我们再说说，如果我们发现第一项分母和最后一项分母并不等价怎么办呢？那就要提到我觉得是这种题目最直接的做法了：利用定积分的定义，大家期中考试完了之后应该才会学习这个知识。我一般做这种题都是直接写成求和形式，变形为定积分定义求的，很方便！

变式：

设$f(0)=0, f'(0)$存在，定义：$x_n = f(\frac{1}{n^2}) + f(\frac{2}{n^2}) + \ldots + f(\frac{n}{n^2})$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，并计算

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin(\frac{1}{n^2}) + \sin(\frac{2}{n^2}) + \ldots\sin(\frac{n}{n^2})\right)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right)$

这个题目就不是那么常规了，是我做的一道感觉非常好的题目

我们先直接来求$x_n=f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+...+f(\frac{n}{n^2})$

x_n的极限：即求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+...+f(\frac{n}{n^2})\right)$

这个时候我们应该用什么方法呢？

发现每一个式子间的关系都是加减关系

我们知道：在求极限问题中，等价替换只能用于乘除关系，如果是加减，就要用到泰勒展开

那我们将每一项都使用泰勒展开！

因为题目只告诉我们一阶导数存在，那就展开到一阶导数项就行了

$$f(\frac{1}{n^2})=f(0)+f'(0)(\frac{1}{n^2}-0)+o(\frac{1}{n^2})=f'(0)\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

$$f(\frac{2}{n^2})=f(0)+f'(0)(\frac{2}{n^2}-0)+o(\frac{2}{n^2})=f'(0)\frac{2}{n^2}+o(\frac{2}{n^2})$$

...

$$f(\frac{n}{n^2})=f(0)+f'(0)(\frac{n}{n^2}-0)+o(\frac{n}{n^2})=f'(0)\frac{n}{n^2}+o(\frac{n}{n^2})$$

求和：$f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+...+f(\frac{n}{n^2})=f'(0)(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2})+o(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2})$

$$=\frac{n(n+1)}{2n^2}f'(0)+o(\frac{n(n+1)}{2n^2})$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+...+f(\frac{n}{n^2})\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}f'(0)+o(\frac{n(n+1)}{2n^2})\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}f'(0)+o(\frac{1}{2})\right)=\frac{1}{2}f'(0)$$

在这个过程中，我们发现，我们始终是对皮亚诺余项进行运算的

而如果我们使用等价替换，就没有这个皮亚诺余项

我们最后运算的结果发现皮亚诺余项对于原式的极限并没有影响，所以如果你使用了等价替换也能算出来答案

但是过程是不对的，因为加减法是无法使用等价替换的！！！

那么下面两问就很简单了

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin(\frac{1}{n^2})+\sin(\frac{2}{n^2})+...\sin(\frac{n}{n^2})\right)$

$f(x)=\sin x, f'(0)=1$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin(\frac{1}{n^2})+\sin(\frac{2}{n^2})+...\sin(\frac{n}{n^2})\right)=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right)$

这些都是乘积关系，要用结论就先取个对数呗

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right)$$

$f(x)=\ln x, f'(0)=1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}$$

那么$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right)=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right)}=e^{\frac{1}{2}}$

$$2.\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

这种题目就很经典了，每年都会非常稳定的出现一道这样的题目

当然这个模型也是非常经典的1^{∞}类型

属于重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e,\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n}=\frac{1}{e}$的拓展了

做法也非常的套路：取对数求极限再取指数

我们先求$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$的极限

$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$(发现这里是ln1类型，那就加一减一利用$\ln(1+x)\sim x$就好了)

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)+1\right)=$(等价替换)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=$(等价替换)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{2}x^{2}}\frac{\sin x-x}{x}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^{3}}=$(等价替换)$2\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^{3}}{x^{3}}=-\frac{1}{3}$

变式：

设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^{3}}=0$

(1)求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^{2}}$

(2)若$f(x)$在$x=0$连续，求$f''(0)$

这种题目是 2020 年的期中考试题考了一道这样的题目，我当时复习的时候感觉没见过这种思路的很难直接想到，所以在模拟题里面让大家混混眼熟(*^▽^*)

设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$

(1)求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

可能看第一眼就感觉有些懵，

让求的这个极限和原题目给的极限太像了:我只用给分子分母同时除以x就行了

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{x}+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=0$$

好的，这样子做完之后，感觉没什么问题，但是对答案时候发现答案竟然不是0! ！！

可恶！为什么呢？

问题出现在了这里:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 6x}{x}+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$，等价替换是不是不能在加减关系中使用哈？

你看分子$\dfrac{\sin 6x}{x}+f(x)$两项之间不是乘除关系，而是加减关系，那么将$\dfrac{\sin 6x}{x}$替换为6，是不是就出问题啦？

那应该怎么做呢？可能你一下子就想到了：嗷 ~~~ 加减法要用泰勒展开！

但是遗憾的是题目并没有告诉我们题目让我们求的是$\dfrac{6+f(x)}{x^2}$的极限，而不是有关$f(x)$及其高阶导数的极限

用泰勒展开好像并不直接，啊，没办法了，看下答案～

设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)+6x-6x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{xf(x)+6x}{x^3}+\dfrac{\sin 6x-6x}{x^3}\right)=0$

那么$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+6x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+6}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-\sin 6x}{x^3}=$（等价替换）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3}=36$

如果你听过我那次的直播课的话，就知道，这个思路其实是拟合法，加减法我们用不了等价替换，

但是我们可以给原式作恒等变形分成估计值和误差值两项的极限，真实值=估计值+误差值

如果你没有听过的话，也没有关系，因为我也没想到这个题可以这么做哈哈哈

而且我觉得我的思路更好耶：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$这个式子我们根本就不知道$f(x)$是什么，如果我们知道$f(x)$的表达式，代入进去不就相当于求函数极限嘛

$f(x)$的表达式怎么求？*emm*...看看选择题第一题变式，你就明白了：去极限符号！

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0\Rightarrow\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=o(1)\Rightarrow\sin 6x+xf(x)=o(x^3)\Rightarrow f(x)=-\dfrac{\sin 6x}{x}+o(x^2)$

那赶紧代入试试！！

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6-\frac{\sin 6x}{x}+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x-\sin 6x}{x}}{x^2}+o(1)=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+o(1)=\text{（等价替换）}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3}+o(1)=36$$

所以去极限符号也是很经典的一种思路哦

(2)若$f(x)$在$x=0$连续，求$f''(0)$

这一问，题目让我们求$f(x)$的高阶导数的极限

那泰勒展开简直太合适不过了

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o\left(x^3\right)\right]+x\left(f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)\right)}{x^3}=0$$

整合一下

$$\lim_{x\to 0}\frac{(6+f(0))x+f'(0)x^2+(\frac{f''(0)}{2!}-36)x^3+o(x^3)}{x^3}=0$$

这个式子极限要为0那么①$6+f(0)=0$，②$f'(0)=0$③$\frac{f''(0)}{2!}-36=0$

那么就有$f(0)=-6$，$f'(0)=0$，$f''(0)=72$

但是有的同学可能是这么做的：

由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$

运用洛必达法则：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=36$

推出$f''(0)=72$，结果对了，但是这个过程依然有问题：

因为洛必达法则必须要求分子分母在一个邻域内可导！！

但是题目只告诉我们$f(x)$在$x=0$处连续

根据我们第4题所讨论的知识：

它是不能推出$f(x)$在$x=0$的邻域内都可导的

也更不可能推出$f'(x)$在$x=0$的邻域内可导

所以，我们不能使用洛必达法则！

还有，大家可能也会有这样的问题：第一问我们求出了$f(x)=-\frac{\sin 6x}{x}+o(x^2)$

能直接求导计算吗？

啊，也不能啦～原因是一样的题目只告诉我们$f(x)$在$x=0$处连续

我们顶多推出$f(x)$在$x=0$处导数存在，或者高阶导数存在，

但是推不出$\lim\limits_{x\to 0}f''(x)$存在，更不能推出$\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=f''(0)$

忘了的话，回头再看看第四题我们讨论的几个问题哦

最后再让大家看一下洛必达法则使用条件：

零比零型

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ ，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ ；

(2) 在点 a 的某去心邻域内两者都可导，且 $g'(x)\neq 0$ ；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ （A 可为实数，也可为 ±∞ ），则 [4]

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

无穷比无穷型

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ ；

(2) 在点 a 的某去心邻域内两者都可导，且 $g'(x)\neq 0$ ；

(3) $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ （A 可为实数，也可为 $\pm\infty$ 或 ∞ ），则 [4]

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

洛必达约束还是蛮多的，考试要注意嗷

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases} x^2\arctan\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$, $f(x)$处处可导，求$f(\varphi(x))$的导数

这个题目不是很难，就是让大家回忆一下复合函数导数的求法，答案如下：

复合函数求导法则很简单

$(f[\varphi(x)])' = f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ 简称：外导乘内导

这个题目比较新颖的一点就在于：内层函数是分段函数，不难验证

$\varphi'(x)$在$x=0$处并不连续

那我们求 $f[\varphi(x)]$ 导数时

在$x=0$处导数是要对 $f[\varphi(x)]$ 整体用导数定义，还是给 $f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$这个式子中利用导数定义就可以了？

其实两种方法都是可行的

既然$\varphi(x)$是分段定义的，那么我们就对$\varphi(x)$分段求导数

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to0}\frac{x^2\arctan\frac{1}{x}-0}{x}=0,\quad \varphi'(x)=\begin{cases}2x\arctan\frac{1}{x}-\frac{x^2}{1+x^2}, & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

由复合函数求导法则：

$$\frac{d[f(\varphi(x))]}{dx}=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)=\begin{cases} f'(x^2\arctan\frac{1}{x})(2x\arctan\frac{1}{x}-\frac{x^2}{1+x^2}), & x\neq0\\ f'(0)\cdot\varphi'(0)=0 & x=0\end{cases}$$

当然，直接用导数定义求$x=0$处导数：

$$\left.\frac{d[f(\varphi(x))]}{dx}\right|_{x=0}=\lim_{x\to0}\frac{f[\varphi(x)]-f[\varphi(0)]}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x^2\arctan\frac{1}{x})-f(0)}{x^2\arctan\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2\arctan\frac{1}{x}}{x}=f'(0)\cdot0=0$$

也可以

4.设$f(x)$由$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + a\sin y = 1 \end{cases}$确定，若$y(0)=b$, 求$\dfrac{d^2 y}{dx^2}\Big|_{t=0}$

这个题目就是隐函数求导了，也几乎年年都考，而且每次都要考到二阶导。

我一般记不住二阶导公式，所以喜欢现场去推导，是利用凑微分思想，其实也不难，而且对于大家以后学习物理，微分方程之类的很有帮助哦

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 大家只要知道这里是关于t的函数就行了，待会凑微分就凑dt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\left[\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}\right]}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

一般我就推導到这一步了，因为$\psi'(t)$ $\frac{1}{\varphi'(t)}$肯定能化简，所以没必要记最终公式.

当然有一个经验：题目让我们求$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$
$\frac{d^2y}{dx^2}$中往往含有$y|_{t=0}$，$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$，所以这两个数据大家一定要求好

回到题目：$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + a\sin y = 1 \end{cases}$

$\frac{dx}{dt} = 2(t+1)$　　$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1-a\cos y}$　　那么$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{t}{(t+1)(1-a\cos y)}$

$y|_{t=0} = b$　　$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\left[\frac{t}{(t+1)(1-a\cos y)}\right]}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{\dfrac{(1-a\cos y) - at(t+1)\sin y \cdot \frac{dy}{dx}}{(t+1)^2(1-a\cos y)^2}}{2(t+1)}$$

到这一步，不要化到最简，直接代入$t=0$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2(1-a\cos b)}$$

$5.u = f[\varphi(x) + y^2]$,其中x, y满足方程$y+e^y = x$,且$f,\varphi$均二阶可导，求$\frac{du}{dx},\frac{d^2u}{dx^2}$

这个题是隐函数求导问题，我们要知道 u 和 y 他们是什么？

他们不是独立的变量，他们是关于 x 的函数！！所以他们与 x 具有隐函数关系

求导的时候就要利用复合函数求导法则

这个思想在物理中非常有用，学过物理竞赛的同学们应该非常了解这一点：虽然 x,v,a（位移，速度，加速度）没有明显地标出是 x(t),v(t),a(t)，但是我们要知道 x,v,a 并不是和 t 无关的变量，它们都是关于 t 的函数，求导的时候是要看成 x(t),v(t),a(t)求导滴

如果你刚开始实在适应不过来，建议你把原题目的 u,y 都写成 u(x),y(x)这样会好理解很多的，不过还是希望大家养成具有隐函数关系的这种思想哦

$u=f[\varphi(x)+y^2]$ ，x,y满足 $y+e^y=x$

$$\frac{du}{dx}=f'[\varphi(x)+y^2]\cdot\left(\varphi'(x)+2y\cdot\frac{dy}{dx}\right) \quad ①$$

↳这里就是因为y与x具有隐函数关系导致的

对方程 $y+e^y=x$ 两侧同时对x求导

$$\frac{dy}{dx}+e^y\cdot\frac{dy}{dx}=1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y+1} \quad \text{代入①}$$

$$\frac{du}{dx}=f'[\varphi(x)+y^2]\cdot\left(\varphi'(x)+\frac{2y}{e^y+1}\right)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d\left[f'[\varphi(x)+y^2]\cdot\left(\varphi'(x)+\frac{2y}{e^y+1}\right)\right]}{dx}$$ 这里大家一定不要着急，一步一步求

$$=\frac{d[f'[\varphi(x)+y^2]]}{dx}\cdot\left(\varphi'(x)+\frac{2y}{e^y+1}\right)+f'[\varphi(x)+y^2]\frac{d\left(\varphi'(x)+\frac{2y}{e^y+1}\right)}{dx} \quad (☆)$$

前导后不导加前不导后导

其中 $\frac{d[f'[\varphi(x)+y^2]]}{dx}=f''[\varphi(x)+y^2]\cdot\left(\varphi'(x)+\frac{2y}{e^y+1}\right)$

$$\frac{d\left(\varphi'(x)+\frac{2y}{e^y+1}\right)}{dx}=\varphi''(x)+2\frac{\frac{dy}{dx}(1+e^y)-ye^y\frac{dy}{dx}}{(1+e^y)^2}$$ 代入$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y+1}$

$$=\varphi''(x)+\frac{2}{(1+e^y)^2}-\frac{2ye^y}{(1+e^y)^3}$$

再代回(☆)可得最终结果

6. 已知$f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$，求$f^{(n)}(x)$

这个是求高阶导数的问题，想告诉大家什么呢？遇到三角问题，大家不要一上来就想着用莱布尼兹求导法则，而要先想怎么利用倍角公式降次，怎么利用积化和差将乘积转变为加减。当然这个变形确实比较难呀~题外话：这个题来源于2020年高联的一道填空题（高中最后一次高联，所以印象比较深刻啦）就出给大家。

首先咱们要知道一个公式：

$$a^n+b^n=(a+b)\cdot[a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1}]$$

注意这个公式仅对n为奇数适用

另外一个，也是大家常用的

$$a^n-b^n=(a-b)[a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1}]$$

这个公式对n为奇数或偶数都成立

$\sin^6 x+\cos^6 x$ 中 6 为偶数，所以我们先要将指数部分变为奇数

$(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$

$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-3\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos(4x+\frac{n\pi}{2})$

7. 讨论$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在所给区间上的连续性和一致连续性

（1） $x\in(0,+\infty)$

(2) $x\in(c,1)$ (0<c<1)

一致连续题目我比较喜欢先用利普希茨判别法进行判定。

利普希茨条件告诉我们：

如果$|f(x_1)-f(x_2)|<L|x_1-x_2|$,$L$为利普希茨常数，

那么$f(x)$一定一致收敛

其实道理很简单呀：

我们只要取$|x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{L}$

那么就有$|f(x_1)-f(x_2)|<L|x_1-x_2|<\varepsilon$

$f(x)$就一致收敛了

但是利普希茨条件很有用！

我们直接用拉格朗日中值定理$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)||(x_1-x_2)|$，$\xi\in(x_1,x_2)$

我们只要能证明$|f'(\xi)|$有界就行了，

所以你拿到题目先求下导，如果发现导函数有界，那太好了

我们直接可以判定函数一致收敛（比如2021的期中）

如果发现导函数无界：

说一个经验规律：

如果是在x=0处导致的无界，那还有可能考虑下函数一致收敛比如$\sqrt{x}$

如果不是0导致的无界，那就转换下思路去证明函数不一致收敛吧

证明不一致收敛就是找点就行

总结一句话：导函数有界是函数一致收敛的充分不必要条件

还有一些结论如下：

注 7　有关一致连续的几个重要结论：

（1）满足 Lipschitz 条件的函数 $f(x)$ 在 I 上一定一致连续.

（2）$f(x)\in C[a,+\infty)$，且单调有界，则 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

（3）$f(x)\in C[a,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

（4）若 $f'(x)$ 在区间 I 上有界，则 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

（5）$f(x)\in C(a,b)$，$f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在.

本题具体的解答过程答案写的比较好（另外一方面是太难敲了呜呜）学长将这种题的分析思路告诉大家了，剩下的就靠大家慢慢研究吧

(2)(i) $\forall x_0\in(0,+\infty)$，取 $|x-x_0|<\frac{x_0}{2}$，得 $\frac{x_0}{2}<x<\frac{3x_0}{2}$. $\forall\varepsilon>0$，欲使

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x_0}\right|$$

$$=2\left|\sin\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{2}\right|\left|\cos\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}}{2}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|}{xx_0}<\frac{2|x-x_0|}{x_0^2}<\varepsilon$$

成立，只须取 $\delta<\frac{\varepsilon x_0^2}{2}$. 于是，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon x_0^2}{2},\frac{x_0}{2}\right\}$，使得 $\forall x$：$|x-x_0|<\delta$，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{2|x-x_0|}{x_0^2}<\varepsilon.$$

由 x_0 的任意性，知 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，$x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则有

$$|x_n-x_n'|=\left|\frac{1}{2n\pi}-\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right|=\frac{\frac{\pi}{2}}{2n\pi\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}<\frac{1}{n}\to0\ (n\to\infty).$$

但 $|f(x_n)-f(x_n')|=1$ 不趋于 0.

故 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内非一致连续.

(ii) $f(x)$ 在 $(c,1)$ 的连续性证明同 (i). $\forall x_1,x_2\in(c,1)$，$\forall\varepsilon>0$，欲使

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|=2\left|\sin\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{2}\right|\left|\cos\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|$$

$$=\frac{|x_1-x_2|}{x_1x_2}<\frac{|x_1-x_2|}{c^2}<\varepsilon$$

成立，只须取 $\delta<c^2\varepsilon$. 于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta<c^2\varepsilon$，使得 $\forall x_2,x_2$：$|x_1-x_2|<\delta$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{|x_1-x_2|}{c^2}<\varepsilon.$$

因而 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(c,1)$ 内一致连续.

三、计算题

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nb_1+a_{n-1}b_2+\ldots+a_1b_n}{n}$

这道题思想性非常好，我大一做这个题的时候也是先积累了下经验哈哈。具体如下：

这种题可能第一下会想到用stolz，感觉上化简了分母

我们先令 $T_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$

用一下stolz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{T_{n+1}-T_n}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+2-k} - \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}.$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[(a_1b_{n+1}+a_2b_n+\cdots+a_{n+1}b_1)-(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)\right] \quad ☆$$

☆可能极限还真的存在，但是求出来的难度会比较大一些，那么用stolz反而加大了难度

就换个做法

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$ 它的难度在于分子各项之间合并不到一块

解决这个问题的方法是作一步换元：令 $\alpha_n = a_n - a \Rightarrow a_n = \alpha_n + a$

这样就分出了一个 a，让分子每个部分都出现了公共因式

$$原式 = \lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha_1+a)b_n+(\alpha_2+a)b_{n-1}+\cdots+(\alpha_n+a)b_1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a(b_1+\cdots+b_n)}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1b_n+\alpha_2b_{n-1}+\cdots+\alpha_nb_1}{n}$$

$$= a\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}}_{①} + \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\alpha_1b_n+\alpha_2b_{n-1}+\cdots+\alpha_nb_1}{n}}_{②}$$

①部分用stolz就很简单 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1+\cdots+b_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(b_1+\cdots+b_{n+1})-(b_1+\cdots+b_n)}{(n+1)-n} = \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = b.$

②虽然不能合并，但 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小量，这样的话我们可以放缩一下：

考虑 $0<\left|\dfrac{\alpha_1b_n+\alpha_2b_{n-1}+\cdots+\alpha_nb_1}{n}\right| \le \dfrac{|\alpha_1b_n|+|\alpha_2b_{n-1}|+\cdots+|\alpha_nb_1|}{n}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 则 $\{b_n\}$ 有界，令 $|b_n|\le M$

则上式 $\le \dfrac{|\alpha_1M|+|\alpha_2M|+\cdots+|\alpha_nM|}{n} \le \dfrac{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|}{n}M$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|}{n}M = M\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{(n+1)-n} = M\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_{n+1}| = 0$

由夹逼定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_1b_n+\alpha_2b_{n-1}+\cdots+\alpha_nb_1}{n}=0$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+\cdots+a_nb_1}{n} = ab.$

四、计算证明题

设$0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,...)$证明数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限

来到了递推数列求极限问题。如果听过我在助消化课堂录制的递推数列极限问题的话。相信你心里已经一下就有做这种题的思路了。

我们说过：递推数列要收敛就一定收敛于不动点：

那就先求一下不动点做到心里有数：

令$f(x)=\sqrt{x(3-x)}$

令$f(x)=x$即$\sqrt{x(3-x)}=x$解得$x=\frac{3}{2}$

那这个题的最终答案一定是$\frac{3}{2}$了，我们下面做题就往$\frac{3}{2}$靠就行

注意到$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\le\frac{x_n+3-x_n}{2}=\frac{3}{2}(n=1,2,...)$

也就是说：除了x_1以外，其他的x_n都$\le\frac{3}{2}$

现在利用作差法求一下单调性：

$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n$, 我们令它大于0

$\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n\ge 0\Rightarrow x_n(3-x_n)\ge x_n{}^2\Rightarrow 3x_n\ge 2x_n{}^2$

$\Rightarrow x_n(2x_n-3)\le 0\Rightarrow 0\le x_n\le\frac{3}{2}$

我们能从题干信息中得到$0\le x_n\le\frac{3}{2}$

首先$x_n\ge 0$显然成立！$x_n\le\frac{3}{2}$我们也证明了

那么$0\le x_n\le\frac{3}{2}$是恒成立的，也就是说$x_{n+1}-x_n\ge 0$是恒成立的

因此从第二项开始$\{x_n\}$单增且$\{x_n\}$有界

由单调有界准则知$\{x_n\}$极限存在：

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\mathrm{a}$

对$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$两侧同时取极限有$\mathrm{a}=\sqrt{\mathrm{a}(3-\mathrm{a})}\Rightarrow\mathrm{a}=\frac{3}{2}$

变式：

假设函数列$\sin_1 x=\sin x,\sin_n x=\sin(\sin_{n-1} x),n=2,3,...,$ 若$\sin x>0$，

(1)证明$\{\sin_n x\}$收敛并求其极限

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}\sin_n x$

这个题目往年题考了两次，所以还是值得拿出来说一说的。主要是第二问，可能

第一次做觉得这是在求数列极限，但是做过一次这种题之后就会发现，用完 stolz

定理把 n 消去后，这其实是一个求函数极限的题目。

证明$\{\sin_n x\}$收敛并求其极限

这种题目肯定是利用单调有界准则求极限的

首先我们知道$\sin_n x\le 1$

然后第一项是大于0的，

根据数学归纳法也很容易得出$\sin_n x>0$

所以$\sin_n x\in(0,1]$

$\sin_n x-\sin_{n-1} x=\sin(\sin_{n-1} x)-\sin_{n-1} x$

$x\in(0,\dfrac{\pi}{2}]$时，有sinx<x恒成立

那么在这里$\sin_n x\in(0,1]$时候

自然有$\sin(\sin_{n-1} x)<\sin_{n-1} x$成立了

于是$\sin_n x-\sin_{n-1} x<0$即$\{\sin_n x\}$单调递减

$\{\sin_n x\}$单调递减且$\sin_n x\in(0,1]$有界，由单调有界准则知$\sin_n x$极限存在

设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin_n x=a$

在$\sin_n x=\sin(\sin_{n-1} x)$两侧同时对$n$取极限得：$a=\sin a$解得$a=0$

要求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}\sin_n x$，本质上我们可以求$(\sqrt{\frac{n}{3}}\sin_n x)^2$的极限再开根号即可

$(\sqrt{\frac{n}{3}}\sin_n x)^2=\frac{n}{3}\sin^2{}_n x$，这样化简的好处在于去掉了根号，下面会有大的用处

$$\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}n\sin^2{}_n x=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{\sin^2{}_n x}}（由stolz定理）=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\text{n}+1-n}{\frac{1}{\sin^2{}_{n+1}x}-\frac{1}{\sin^2{}_n x}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2{}_{n+1}x}-\frac{1}{\sin^2{}_n x}}$$

这样我们就消去了n，这也是去掉根号的好处

$$\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2{}_{n+1}x}-\frac{1}{\sin^2{}_n x}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2(\sin_n x)}-\frac{1}{\sin^2{}_n x}}（本质就是求一个函数极限）$$

$$\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin^2 t}{t^2-\sin^2 t}=\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{t^4}{(t+\sin t)(t-\sin t)}=\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{t}{(t+\sin t)}\frac{t^3}{(t-\sin t)}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{t}{(t+\sin t)}\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{(t-\sin t)}=\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{\frac{1}{6}t^3}=\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}\bullet 6=1$$

那么$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}\sin_n x=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{\frac{n}{3}}\sin_n x)^2}=1$

经过一系列的奋斗，我们终于走到了中值定理篇。我个人认为数分最难的是三个板块：①中值定理②积分不等式③无穷级数。所以期中考试在这里出30分的题目就直接导致了期中数分的难度陡然上升，可能解决好这个板块的内容，我们期中的分数会直接上涨20多分。如果你已经看到了这里，说明你是十分信任学长了哈哈（yysy看到前面写了30页自己都有点惊讶呢）。那我就来带你攻克这个终极boss吧。

其实大家在做往年题时候不难发现，试题主要考察：①介值定理或零点存在定理②罗尔定理③拉格朗日中值定理④泰勒中值定理，让我们来逐一破解它们！！

五、证明题

设$f(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导.$f(2)=2$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$, 证明：

存在$\xi\in(1,2)$使得$f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$

首先我们在卷子上会遇到第一个中值问题：罗尔定理。这种题难在什么地方？我们发现,答案在刚开始会直接写一句构造辅助函数F(x)，那这些辅助函数都是怎么来的呀？

同学们在高中的时候也会遇到构造辅助函数的问题：

（1）$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=f(x)g(x)$；

（2）$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq0)$；

（3）$xf'(x)+f(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=xf(x)$；

（4）$xf'(x)-f(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x\neq0)$；

（5）$xf'(x)+nf(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=x^n f(x)$；

(6) $xf'(x)-nf(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}(x\neq0)$；

(7) $f'(x)+f(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=e^x f(x)$；

(8) $f'(x)-f(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}(x\neq0)$；

(9) $f'(x)+kf(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=e^{kx}f(x)$；

(10) $f'(x)-kf(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=\dfrac{f(x)}{e^{kx}}(x\neq0)$；

(11) $f(x)+f'(x)\tan x>0(或<0)\Rightarrow F(x)=\sin xf(x)$；

(12) $f(x)-f'(x)\tan x>0(或<0)\Rightarrow F(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}(\sin x\neq0)$；

(13) $f'(x)+\tan xf(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}(\cos x\neq0)$；

(14) $f'(x)-\tan xf(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=\cos f(x)$；

(15) $f'(x)+\ln af(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=a^x f(x)$；

(16) $f'(x)-\ln af(x)>0(或<0)\Rightarrow F(x)=\dfrac{f(x)}{a^x}$；

罗尔定理构造的辅助函数的来源也就是我们高中学习的这些构造。但是，毕竟我们已经是大学生了嘛，当然不能记这么多结论了（话说我高中时候就很好奇这些函数到底是怎么看出来的）

我们可以直接把原函数给它解出来：
怎么解呢？
是不是左边的来源是原函数求导的结果，因此要求原函数，思路自然是积分！
（当然这里的积分是非常基础的积分哈，大家高中都学过）
不难发现，以上16种构造都有一个共同特点：
它们都可以写成$f'(x)+p(x)f(x)=0$的形式
那么我们就只需要研究这种类型的题目原函数怎么构造就可以了
$f'(x)+p(x)f(x)=0$两边同除$f(x)$
（在这里你可能会好奇$f(x)=0$怎么办，其实原函数有很多种，
我们只要求出一种就行了，因此无需顾虑）

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}+p(x)=0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=-p(x)$$

然后两侧同时积分$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int -p(x)dx$

左式$=\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{d(f(x))}{f(x)}=\ln f(x)+C$（不定积分加一个常数）

那么此时就有$\ln f(x)+C=\int -p(x)dx$，
我们在用罗尔定理的时候是根据F(a)=F(b)，得出在(a,b)上$F'(x)=0$
那么无论我们构造的是F(a)=F(b)，还是$F(a)+C=F(b)+C$，
得到的结果都一模一样，因此我们就取C=0
找到一个最简单的原函数就行了：

$$\ln f(x)=\int -p(x)dx \Rightarrow f(x)=e^{-\int p(x)dx}$$

我们把右边乘到左边$f(x)e^{\int p(x)dx}=1$，
刚刚我们说了，常数没影响，这里直接丢掉右边的1
我们要的原函数就是左边的式子$F(x)=f(x)e^{\int p(x)dx}$
大家可以试一下我们高中学习的这些例子，你会发现这些原函数都不用记
我们手动给它全算出来！

我再讲一下求解这种问题的解题步骤：

①将原式中的中值ξ全部换为x

②如果我们能将该式子化简为$f'(x)+p(x)f(x)=0$的形式

③构造F(x)=$f(x)e^{\int p(x)dx}$

④找两个点a, b使得F(a)=F(b)，这两个点题目往往会告诉我们信息：

⑤在(a, b)上应用罗尔定理：

现在我们解决一下这道题目：

①将原式中的中值ξ全部换为x:

$f'(\mathrm{x})=\dfrac{2f(x)}{x}$

②如果我们能将该式子化简为$f'(x)+p(x)f(x)=0$的形式：

$f'(\mathrm{x})=\dfrac{2f(x)}{x}\Rightarrow f'(x)\mathrm{x}-2f(x)=0\Rightarrow f'(x)-\dfrac{2}{x}f(x)=0$

我们将原式化简为了$f'(x)-\dfrac{2}{x}f(x)=0$，此时$p(x)=-\dfrac{2}{x}$

③构造$\mathrm{F}(\mathrm{x})=f(x)e^{\int p(x)dx}$：

$F(\mathrm{x})=f(x)e^{\int -\frac{2}{x}dx}=f(x)e^{-2\ln x}=f(x)e^{\ln x^{-2}}=\dfrac{f(x)}{x^2}$

④找两个点a, b使得F(a)=F(b)，这两个点题目往往会告诉我们信息：

比如这个题目告诉我们$f(2)=2$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$

那么$F(2)=\dfrac{f(2)}{2^2}=\dfrac{1}{2},F(1)=\dfrac{f(1)}{1^2}=\dfrac{1}{2}$,有$F(1)=F(2)$

⑤在(a, b)上应用罗尔定理：

在(1, 2)由罗尔定理得：存在$\xi\in(1,2)$

使得$F'(\xi)=0$

$F'(\xi)$是谁？它不是别人，它就一定含有$f'(\xi)-\dfrac{2}{\xi}f(\xi)$,因为我们就是用这个函数积分得到的$F(\mathrm{x})$

所以$F(\mathrm{x})$的导函数一定就有$f'(\mathrm{x})-\dfrac{2}{x}f(x)$

现在我们再把它变回到题目的样子：$f'(\xi)-\dfrac{2}{\xi}f(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$

当然我们做题也要神秘一些：

第一步直接构造$F(\mathrm{x})=\dfrac{f(x)}{x^2}$

然后$F(2)=\dfrac{f(2)}{2^2}=\dfrac{1}{2},F(1)=\dfrac{f(1)}{1^2}=\dfrac{1}{2}$, 有$F(1)=F(2)$

在(1, 2)由罗尔定理得：存在$\xi\in(1,2)$

使得$F'(\xi)=0$

再把$F'(\mathrm{x})$求出来：$F'(\mathrm{x})=\dfrac{f'(x)x^2-f(x)2x}{x^4}=\dfrac{f'(x)x-2f(x)}{x^3}$

由$F'(\xi)=0\Rightarrow\dfrac{f'(\xi)\xi-2f(\xi)}{\xi^3}\Rightarrow f'(\xi)\xi-2f(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$

变式：

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=0, f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$ 证明：

(1) 存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得$f(\eta)=\eta$

(2) 存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)+2\xi(f(\xi)-\xi)=1$

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=0, f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$证明：

(1) 存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得$f(\eta)=\eta$

如果大家在做中值问题的时候，

发现这个含中值的式子没有涉及任何求导运算，

那么它就是考介值定理（零点存在定理）的（我个人认为这两个定理说的就是一句话哈）

做法就是直接把右边式子挪到左边：

构造$F(x)=f(x)-x$，

由$f(x)$在$[0,1]$上连续知$F(x)$在$[0,1]$上连续

$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$F(1)=f(1)-1=-1$

$F(\frac{1}{2})\cdot F(1)<0$，由零点存在定理：存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得$F(\eta)=0$即$f(\eta)=\eta$

(2) 存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)+2\xi(f(\xi)-\xi)=1$

这个题目我们变形时候会发现，我们得不到$f'(x)+p(x)f(x)=0$的形式

那么怎么办呢？

下面我来讲下$f'(x)+p(x)f(x)=q(x)$的原函数

首先我们先给两侧同时乘$e^{\int p(x)dx}$

（关于为什么要乘这个式子，其实它叫恰当因子，

如果大家学常微分方程的话会知道的，大家先记住吧）

得到：$e^{\int p(x)dx}\left(f'(x)+p(x)f(x)\right)=q(x)e^{\int p(x)dx}$

左边会神奇地发现：它就是$\left(e^{\int p(x)dx}f(x)\right)$的导函数

那么$\left(e^{\int p(x)dx}f(x)\right)'=q(x)e^{\int p(x)dx}$，我们再积分一次

$\Rightarrow e^{\int p(x)dx}f(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}\mathrm{d}x$，将右边挪到左边

现在我们要构造的原函数就是：$F(x)=e^{\int p(x)dx}f(x)-\int q(x)e^{\int p(x)dx}\mathrm{d}x$

大家记好过程就行，不必记最后的结论（学长也从来也没记住过这个哈哈）

我们来解决一下这个题目：

①将原式中的中值ξ全部换为x

$f'(\xi)+2\xi(f(\xi)-\xi)=1\Rightarrow f'(x)+2x(f(x)-x)=1$

②如果我们能将该式子化简为$f'(x)+p(x)f(x)=q(x)$的形式

$f'(x)+2xf(x)-2x^2=1\Rightarrow f'(x)+2xf(x)=2x^2+1$，$p(x)=2x, q(x)=2x^2+1$

③构造$F(x)=F(x)=e^{\int p(x)dx}f(x)-\int q(x)e^{\int p(x)dx}\mathrm{d}x$

$\int p(x)dx=\int 2xdx=x^2$ ； $\int q(x)e^{\int p(x)dx}\mathrm{d}x=\int\left(2x^2+1\right)e^{x^2}\mathrm{d}x=xe^{x^2}$

那么$F(x)=e^{x^2}f(x)-xe^{x^2}$

④找两个点a, b使得F(a)=F(b)，这两个点题目往往会告诉我们信息：

$f(0)=0, f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$

$F(0)=0, F(1)=-e, F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$，我们发现三个值都不相等，那是直接用不了罗尔定理的

⑤在(a, b)上应用罗尔定理：

但是你画一下三个点的位置，

不难发现$F(0)=0$，$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}>F(0), F(1)=-e<F(0)$，在$(\frac{1}{2},1)$之间必存在$\zeta$使得$F(\zeta)=F(0)$

我们在$(0,\zeta)$上可以使用罗尔定理：

存在$\xi\in(0,\zeta)$，使得$F'(\xi)=0$

$F'(x)=(f'(x)-1)e^{x^2}+(f(x)-x)e^{x^2}2x=(f'(x)-1+2xf(x)-2x^2)e^{x^2}$

$F'(\xi)=(f'(\xi)-1+2\xi f(\xi)-2\xi^2)e^{\xi^2}\Rightarrow f'(\xi)-1+2\xi f(\xi)-2\xi^2=0\Rightarrow f'(\xi)+2\xi(f(\xi)-\xi)=1$

综上：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)+2\xi(f(\xi)-\xi)=1$

六证明题：

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0, f(1)=1$.证明：

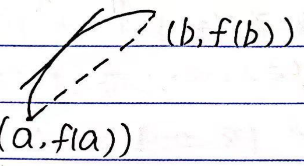
(1)在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ, η, 使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$;

(2)对任意给定正数a, b，在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ, η, 使得 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$;

接下来你会遇到拉格朗日中值定理：拉格朗日中值定理多用来考察双中值问题。

学好拉格朗日中值定理，我们要先知道拉格朗日中值定理的几何意义。

拉格朗日中值定理的几何意义：



若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续在 (a,b) 上可导，则 $\exists\, \xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

我们看这个式子告诉我们什么道理？

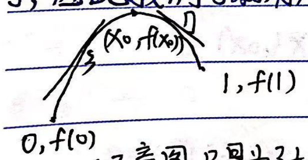
左边是不是一个割线斜率，右边是在 ξ 处的切线斜率

那么拉格朗日中值定理的几何意义就是：切线斜率 = 割线斜率

我们来解决一下这道题：

题目让我们证明存在不同的 ξ 和 $\eta \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi)\cdot f'(\eta)=1$

突破点在哪里呢？ $f'(\xi)$ 和 $f'(\eta)$ 都是在一点处的切线斜率，太抽象了，因此我们可利用几何意义将它转化为割线斜率 设一点 $(x_0, f(x_0))$



我们就将 $f'(\xi)$ 转化为 $\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$

将 $f'(\eta)$ 转化为 $\dfrac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=\dfrac{1-f(x_0)}{1-x_0}$

(示意图，只是为了好理解)

则 $f'(\xi)\cdot f'(\eta)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}\cdot\dfrac{1-f(x_0)}{1-x_0}=1$

$\Rightarrow f(x_0)-f^2(x_0)=x_0(1-x_0)$ 将其看作为 $f(x_0)$ 的函数

$\Rightarrow f^2(x_0)-f(x_0)-x_0^2+x_0=0$

由求根公式 $f(x_0)=\dfrac{1+\sqrt{1-4x_0^2+4x_0}}{2}=\dfrac{-2x_0+2}{2}=-x_0+1$

或 $f(x_0)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x_0^2+4x_0}}{2}=\dfrac{1-(1-2x_0)}{2}=+x_0$

现在我们构造点(x_0,x_0)和点$(x_0,1-x_0)$都可以证明出结论

但$f(x)$上一定$\exists(x_0,x_0)$吗?

得马上验证一下:

构造$F(x)=f(x)-x$

$F(0)=0$, $F(1)=0$

$x_0\in(0,1)$的,我们无法由零点存在定理说明$f(x)$上一定$\exists$一点(x_0,x_0)

所以我们不能取(x_0,x_0)

那再马上验证下$(x_0,1-x_0)$

构造$F(x)=f(x)+x-1$

$F(0)=-1$, $F(1)=1$

由零点存在定理$\exists x_0\in(0,1)$使$F(x_0)=0$ 即$f(x)$上一定有一点$(x_0,1-x_0)$

那我们就在$(0,0)-(x_0,1-x_0)$上用一次拉格朗日中值定理

在$(x_0,1-x_0)-(1,1)$上用一次拉格朗日中值定理

即证.

(2) 同样的思路:在$(0,x_0)$上利用拉中 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$

在$(x_0,1)$上利用拉中 $f'(\eta)=\dfrac{1-f(x_0)}{1-x_0}$

代入题目$\Rightarrow \dfrac{ax_0}{f(x_0)}+\dfrac{b(1-x_0)}{1-f(x_0)}=a+b$

这个要解方程太难了,我们倒不如想一想取什么x_0,$f(x_0)$能让该等式成立

把$a+b$除过来$\Rightarrow \dfrac{\frac{a}{a+b}x_0}{f(x_0)}+\dfrac{\frac{b}{a+b}(1-x_0)}{1-f(x_0)}=1$

不难发现 $x_0+1-x_0=1$,那只要让$\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f(x_0)}=1$, $\dfrac{\frac{b}{a+b}}{1-f(x_0)}=1$

我们发现 $f(x_0)=\frac{a}{a+b}$ 恰好就可使该等式成立

那 $f(x_0)$ 能等于 $\frac{a}{a+b}$ 吗？

$f(0)=0$，$f(1)=1$ $\quad 0<\frac{a}{a+b}<1$

由介值定理：$\exists x_0\in(0,1)$ 使 $f(x_0)=\frac{a}{a+b}$

现在找到了 $(x_0,\frac{a}{a+b})$

在 $(0,x_0)$，$(x_0,1)$ 上分别用拉中便可证

还有一种求法，网上也能看到这种

$$\frac{ax_0}{f(x_0)}+\frac{b(1-x_0)}{1-f(x_0)}=a+b$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{a+b}x_0}{f(x_0)}+\frac{\frac{b}{a+b}(1-x_0)}{1-f(x_0)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x_0}{\frac{(a+b)f(x_0)}{a}}+\frac{1-x_0}{\frac{(a+b)(1-f(x_0))}{b}}=1$$

发现只要分母相等，该式就成立

$$令\ \frac{(a+b)}{a}f(x_0)=\frac{a+b}{b}(1-f(x_0))$$

$$\Rightarrow f(x_0)=\frac{a}{a+b}$$

这个是最后的答案

证明 （1）令$F(x)=f(x)-1+x$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，且$F(0)=-1<0, F(1)=1>0$，由介值定理知，存在$x_0\in(0,1)$ 使得$F(x_0)=0$，即$f(x_0)=1-x_0$.

在$[0,x_0]$和$[x_0,1]$上对$f(x)$分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点$\xi\in(0,x_0)$，$\eta\in(x_0,1)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}$，$f'(\eta)=\dfrac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}$. 于是

$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{1-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{1-x_0}{x_0}\cdot\frac{x_0}{1-x_0}=1.$$

分析 （2）$\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b\Leftrightarrow\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}+\dfrac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)}=1\xleftrightarrow{\text{记}f(x_1)=\frac{a}{a+b}}\dfrac{f(x_1)}{f'(\xi)}+\dfrac{1-f(x_1)}{f'(\eta)}=1$

$\Leftrightarrow\dfrac{f(x_1)-f(0)}{f'(\xi)}+\dfrac{f(1)-f(x_1)}{f'(\eta)}=1\Leftrightarrow x_1+(1-x_1)=1.$

证明 （2）因为$0<\dfrac{a}{a+b}<1$而$f(0)=0, f(1)=1$，由$f(x)$连续知，$\exists x_1\in(0,1)$，使得$f(x_1)=\dfrac{a}{a+b}$，$f(x)$在$[0,x_1],[x_1,1]$上分别用拉格朗日中值定理，有

$$f(x_1)-f(0)=(x_1-0)f'(\xi),\ \xi\in(0,x_1) \quad ①$$

$$f(1)-f(x_1)=(1-x_1)f'(\eta),\ \eta\in(x_1,1) \quad ②$$

注意到$f(0)=0, f(1)=1$，由①，②式有

$$x_1=\frac{f(x_1)}{f'(\xi)}=\frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)} \quad ③$$

$$1-x_1=\frac{1-f(x_1)}{f'(\eta)}=\frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)} \quad ④$$

③+④可得
$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

变式：

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=0, f(1)=1$.证明：

(1)存在$x_0\in(0,1)$,使得$f(x_0)=2-3x_0$

(2)在$(0,1)$内存在不同的ξ,η,使得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$;

三、(12 分) 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(x)$在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明:

(1) 存在$x_0\in(0,1)$使得$f(x_0)=2-3x_0$;

(2) 存在$\xi,\eta\in(0,1)$，且$\xi\neq\eta$，使得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

【参考解答】: **(1)** 令$F(x)=f(x)-2+3x$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，且$F(0)=-2$，$F(1)=2$. 于是由介值定理，存在$x_0\in(0,1)$，使得$F(x_0)=0$，即

$$f(x_0)=2-3x_0.$$

(2) 在区间$[0,x_0],[x_0,1]$上利用拉格朗日中值定理，存在$\xi,\eta\in(0,1)$且$\xi\neq\eta$使得

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi),\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=f'(\eta)$$

整理即得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

这个题和第一题几乎一样，当然这个题难度还低一些，他在第一问就把第二问要找的你那个点告诉你了。不过如果你没注意到的话，可以用解方程的思路把它解出来~话说这个方法好像还是学长自己探索的捏，小小骄傲一下叭~~~一般解答都不会告诉我们那个点是怎么找出来的，网上经常也说的含糊不清，不过大家现在应该知道：我们可以把它算出来！

七.计算题

函数$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}$，求该函数的单调区间，极值点，极值，凹凸区间，拐点

这个题是 2021 年的期中考试题，为什么要选这个题呢？一方面是给卷子整体降降难度(bushi 另一方面呢，是我去年这个题扣了 2 分

答案大家都有

七、计算题(本题 8 分)已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}$，试求该函数的单调区间、极值点与极值、凹凸区间与拐点.

解 $f'(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^3}$, $f''(x)=\dfrac{2-4x}{(x+1)^4}$ 2 分

令$f'(x)=0$得$x_1=0$, 令$f''(x)=0$得$x_1=\dfrac{1}{2}$. 2 分

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	不	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	不	+	+	+	0	-
$f(x)$	增、凸		减、凸	极小 0	增、凸	拐点$(\frac{1}{2},\frac{1}{9})$	增、凹

所以，$f(x)$在$[-1,0]$单减，在$(-\infty,-1)$与$[0,+\infty)$上单增，在$x=0$取极小值$f(0)=0$. 2分

$f(x)$在$(-\infty,-1)$与$(-1,0]$及$[0,\dfrac{1}{2}]$上凸，在$[\dfrac{1}{2},+\infty)$上凹，$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{9})$为拐点. 2 分

仔细看一下最后的区间形式，在高中的时候老师告诉我们单调区间全写成开集就可以了，但是去年结论全写成开区间会扣 2 分，所以大家还是考试时候不要全写成开吧，写成半闭半开的会好一些（具体我也不知道为什么全写成开不严谨呢）

八.证明题：

设$f(x)$在$\left[a,b\right]$上二阶可导，且$f'(\mathrm{a})=f'(\mathrm{b})=0$，求证：
存在$\xi\in\left(a,b\right)$，使得：

$$f''(\xi)\geq\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$$

最后就到压轴题了：泰勒中值定理，这种题目的标志就是，题目出现的导数的阶数比较高了。

要解决泰勒中值定理，我们只需要注意两个问题：

①用谁在哪里展开

②展开到几阶

这种题是以往考的类型，是让我们证明存在一个中值满足条件就可以了。那一般就是把 f(x)在一些点展开就行了（常见展开点为：题目所给的点，端点，区间中点，极值点）具体地真的要大家尝试了，压轴题一般没有什么通法，还是要大家有一些探索能力的，毕竟数分满分不是那么好拿滴

那我们就顺着思路：

将$f(x)$分别在$x=a, x=b$处展成泰勒公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2 ①$$

$a<\xi_1<x$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2 ②$$

$x<\xi_2<b$

②−①得：$f(b)-f(a)=\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2$（※）

因为我们目前做的工作只是恒等变形对吧？

所以按理来说（※）一定可以推出结论

我们直接按照结论的样子对（※）变形：

$\left(\text{目标：}f''(\xi)\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|\right)$即$\left(\text{目标:}|f(b)-f(a)|\leq\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)\right)$

$$|f(b)-f(a)|=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2\right|$$

现在方向是不是就有了？把右侧放大到$\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$

建议大家采用逐步调整法：一点一点放缩

可能你会直接放缩成$\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2\right|+\left|\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2\right|$

一步得出结果，但是有的放缩要求比较紧的题目是做不出来的

$\left(\text{目标:}|f(b)-f(a)|\leq\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)\text{中只有一个}\xi\right)$

那就先放缩中值：取$f''(\xi)=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$

$$\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2\right|\leq\frac{f''(\xi)}{2}\left|(x-a)^2-(x-b)^2\right|$$

注意到$|f(b)-f(a)|\leq\frac{f''(\xi)}{2}\left|(x-a)^2-(x-b)^2\right|$是对$(a,b)$上的任何$x$都成立的

现在目标是不是就转变为了找一个合适的x使得$\left|(x-a)^2-(x-b)^2\right|\leq\frac{(b-a)^2}{4}$

取什么值呢？我们慢慢分析：

我们化简一下这个式子：

$$\left|a^2-b^2+2x(b-a)\right|\leq\frac{(b-a)^2}{4}$$

即$|2x-(b+a)|\leq\frac{(b-a)^2}{4}$只要取$x=\frac{(b+a)}{2}$就得证了

值得注意的是$x=\frac{(b+a)}{2}$时

左式$=0$, 右式$=\frac{(b-a)^2}{4}$，所以本题的放缩还是给大家留了一些空间的

所以可能你第一步直接放缩成$\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}\right|(x-a)^2+\left|\frac{f''(\xi_2)}{2}\right|(x-b)^2$也能得到最终结果

但是建议大家采用逐步调整法哈～

变式

设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且满足条件$|f(\mathrm{x})|\le a, |f''(\mathrm{x})|\le b$, 其中$a,b$都是正实数

证明：当$\mathrm{x}\in(0,1)$时$|f'(\mathrm{x})|\le 2a+b$

这个题目是去年考察的类型，所以给大家提供下思路。这种题目就不一样了，它让我们证明的是任意的x属于(0,1)都要满足题意，那么我们就不能只在某些点展开，而要在任意的点x0展开。用谁展开呢？ x然后代入：题目所给点，区间端点，区间中点，极值点。

将$f(x)$在$(0,1)$上任意点x_0展开：

$$f(x)=f(\mathrm{x}_0)+f'(\mathrm{x}_0)(x-\mathrm{x}_0)+\frac{f''(\varsigma)}{2!}(x-\mathrm{x}_0)^2$$

代入0和1有：

$$f(0)=f(\mathrm{x}_0)+f'(\mathrm{x}_0)(0-\mathrm{x}_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-\mathrm{x}_0)^2 \text{①}$$

$$f(1)=f(\mathrm{x}_0)+f'(\mathrm{x}_0)(1-\mathrm{x}_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-\mathrm{x}_0)^2 \text{②}$$

然后两式相减得$f(1)-f(0)=f'(\mathrm{x}_0)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-\mathrm{x}_0)^2-\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(0-\mathrm{x}_0)^2$

$$\Rightarrow f'(\mathrm{x}_0)=f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\mathrm{x}_0{}^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-\mathrm{x}_0)^2$$

那么$|f'(\mathrm{x}_0)|=\left|f(1)-f(0)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}\mathrm{x}_0{}^2-\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-\mathrm{x}_0)^2\right|\le|f(1)-f(0)|+\left|\dfrac{f''(\xi_1)}{2}\mathrm{x}_0{}^2-\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-\mathrm{x}_0)^2\right|$

$$\le|f(1)|+|f(0)|+\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}\right|\mathrm{x}_0{}^2+\left|\frac{f''(\xi_2)}{2}\right|(1-\mathrm{x}_0)^2\le 2a+b\left[\mathrm{x}_0{}^2+(1-\mathrm{x}_0)^2\right]\le 2a+b$$

可能大家直接把每一项拆开就得到最后结论了，那是因为这个题目右边给的是非常宽的，
所以建议大家一步一步放缩，根据题目要证明的右侧的值慢慢调整
其实题目的难易程度往往就取决于绝对值不等式这里，
简单的一下子就出来了，难的题目还要用一些不等式
（绝对值不等式在积分不等式地方用的很多，所以大家还是要慢慢积累经验）

写在最后：

唔，感谢你孜孜不倦地看到这里呀。学长真的把毕生所学都教给大家啦，相信你也已经收获了不少的解题技巧了。其实写答案时候还是蛮感慨的，突然发现原来能在一套数分卷子上唠很多很多的话。里面的每一个技巧或许都是学长在那段夕阳西下，繁星点点的独属于自己的时光中雕刻出来的。写这些答案的时候就有一种讲自己的“故事”的感觉，数分还是需要大家用心去体悟的一门学科，或许你也会逐渐为此而着迷。

但遗憾是还是要告诉大家考前还要反复去看往年题目。这套试题只是学长带给大家一些解题的思路，能不能在考场上用到就得看大家考前的练习了。希望能大家取得一个好成绩~