北京航空航天大学

2022－2023 学年

士嘉书院

第一学期期中考试复习模拟题

《 工科数学分析（1） 》

一. 单项选择(每小题 4 分, 共 20 分)

1. 当$x \to 0^{+}$时，将(1)$x(\cos\sqrt{x}-1)$,(2)$\sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$,(3)$\sqrt[3]{x+1}-1$,(4)$x-\sin x$的阶从低阶到高阶排列，正确的排序为（ ）

A. （1）（2）（3）（4）

B. （2）（3）（1）（4）

C. （2）（1）（3）（4）

D. （3）（2）（1）（4）

变式： 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{x^2}}-1}{\arctan x^2}=C\neq 0$, 求 a, b 使 x $\to$ 0, $f(x)\sim ax^b$

2. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+...+na_n}{n(n+1)}=$( )

A．0

B．a

C．$\dfrac{a}{2}$

D. 不存在

变式： 若$0<\lambda<1$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,求证$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+...+\lambda^n a_0)=\dfrac{a}{1-\lambda}$

3. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), x\le 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, x>0\end{cases}$, $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导，

则a，b等于（ ）

A. -1, 1

B. $\dfrac{1}{2},\ln 2$

C. $-1,\ln 2$

D. -1, 1

4.设$f(0)=0$,下列四个选项中能确定$f(x)$在$x=0$处可导的是（）

$A.\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{h}$存在

$B.\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^{h})}{h}$存在

$C.\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sinh)}{h^{2}}$存在

$D.\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$存在

$$5.f(x)=\begin{cases}x,x\le 0\\ \dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n+1}\le x\le \dfrac{1}{n},n=1,2,...\end{cases}$$

则（）

$A.$x=0是$f(x)$的第一类间断点

$B.$x=0是$f(x)$的第二类间断点

$C.f(x)$在$x=0$处连续但不可导

$D.f(x)$在$x=0$处可导

变式：

讨论$f(x)$的连续性，指出间断点类型

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x},x\le 0\\ \sin\dfrac{1}{x^{2}-1},x>0\end{cases}$$

二、 计算题

$$1.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1^2}+\frac{1+2}{n^3+2^2}+\ldots+\frac{1+2+\ldots+n}{n^3+n^2}\right)$$

变式：

设 $f(0)=0, f'(0)$ 存在，定义：$x_n=f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\ldots+f(\frac{n}{n^2})$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，并计算

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin(\frac{1}{n^2})+\sin(\frac{2}{n^2})+\ldots\sin(\frac{n}{n^2})\right)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right)$

$2.\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

变式：

设 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$

(1)求 $\lim_{x\to 0}\frac{6 + f(x)}{x^2}$

(2)若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续，求 $f''(0)$

3. 设$\varphi(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$, $f(x)$处处可导，求$f(\varphi(x))$的导数

4.设$f(x)$由$\begin{cases}x=t^2+2t\\ t^2-y+a\sin y=1\end{cases}$确定，若$y(0)=b$,求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$

5.$u=f[\varphi(x)+y^2]$,其中x, y满足方程y+e$^y=x$, 且f,φ均二阶可导，求$\frac{du}{dx},\frac{d^2u}{dx^2}$

6. 已知$f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$，求$f^{(n)}(x)$

7. 讨论$f(\mathrm{x})=\sin\frac{1}{x}$在所给区间上的连续性和一致连续性

（1） $\mathrm{x}\in(0,+\infty)$

(2) $\mathrm{x}\in(\mathrm{c},1)$ (0<c<1)

三、计算题

已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b,$计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_nb_1+a_{n-1}b_2+...+a_1b_n}{n}$

四、计算证明题

设$0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,...)$证明数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限

变式：

假设函数列$\sin_1 x = \sin x, \sin_n x = \sin(\sin_{n-1} x), n = 2,3,...,$ 若$\sin x > 0$，

(1)证明$\{\sin_n x\}$收敛并求其极限

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}\sin_n x$

五、证明题

设$f(x)$在$\left[1,2\right]$上连续，在$(1,2)$内可导.$f(2)=2$，$f(1)=\frac{1}{2}$, 证明：

存在$\xi\in(1,2)$使得$f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$

变式：

设$f(x)$在$\left[0,1\right]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=0, f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$ 证明：

(1) 存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使得$f(\eta)=\eta$

(2) 存在$\xi\in(0,1)$, 使得$f'(\xi)+2\xi(f(\xi)-\xi)=1$

六证明题：

设$f(x)$在$\left[0,1\right]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=0, f(1)=1$.证明：

(1)在$(0,1)$内存在不同的ξ, η, 使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$;

(2)对任意给定正数a, b，在$(0,1)$内存在不同的ξ, η, 使得$\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$;

变式：

设$f(x)$在$\left[0,1\right]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=0, f(1)=1$.证明：

(1)存在$x_0\in(0,1)$,使得$f(x_0)=2-3x_0$

(2)在$(0,1)$内存在不同的ξ, η, 使得$\left[1+f'(\xi)\right]\left[1+f'(\eta)\right]=4$;

七. 计算题

函数$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}$，求该函数的单调区间，极值点，极值，凹凸区间，拐点

八. 证明题：

设$f(x)$在$\left[a,b\right]$上二阶可导, 且$f'(\mathrm{a})=f'(\mathrm{b})=0$, 求证：

存在$\xi\in\left(a,b\right)$,使得：

$$f''(\xi)\geq\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$$

变式

设$f(x)$在$\left[0,1\right]$上二阶可导，且满足条件$\left|f(\mathrm{x})\right|\leq a, \left|f''(\mathrm{x})\right|\leq b$, 其中$a,b$都是正实数

证明：当$\mathrm{x}\in(0,1)$时$\left|f'(\mathrm{x})\right|\leq 2a+b$