北京航空航天大学

2022－2023 学年

士嘉书院

第二学期期中考试复习模拟题答案

《 工科数学分析（2） 》

一. 单项选择

1.下列级数收敛的有(B)个

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$ (4) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)$

(5) $\sum_{n=3}^{\infty}\left(-\ln\cos\frac{\pi}{n}\right)$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^{n+1}}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

A. 3　　B. 4

B. 5　　D. 6

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

这个直接使用结论，该级数发散，不过多解释

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$

本题的通项是由两部分组成的，这两部分的级数都是发散的，

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\neq\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2+1}$ - $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2-1}$

这个性质仅在拆开后的两个级数都收敛时才成立

在判断敛散性中，其实我们更倾向于通项只有一项

因此我们要对题目的通项进行整合，采取分子有理化技巧

$$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\sim\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同敛散

则$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$发散

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$

这个主要考察的是换底公式$3^{\ln n}=n^{\ln 3}$

证明：$3^{\ln n}=n^{\ln 3}$，两侧同时取对数$\ln n\cdot\ln 3=\ln 3\cdot\ln n$，即证

又$\ln 3>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$ 收敛

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)$

先整理下通项:$\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)$,

正项级数的敛散性可以根据等价替换的方法判断(只有正项级数或判断绝对收敛时才可以)

$\ln\left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)\sim\frac{2}{n^2-1}\sim\frac{2}{n^2}$

因$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2}$收敛，则原级数收敛

(5) $\sum_{n=3}^{\infty}\left(-\ln\cos\frac{\pi}{n}\right)$

其实利用等价替换判断的本质是在找通项的同阶无穷小，因为正项级数与其同阶无穷小同敛散

那么我们不仅可以用等价替换，也可以用含皮亚诺余项的$Talor$展开

$n\to\infty$时，$\cos\frac{\pi}{n}\to 1$

那么$\ln\cos\frac{\pi}{n}$其实是我们上学期在等价替换中讲的$\ln A\,(A\to 1)$模型

它的处理方法恒等变形$\ln A=\ln(1+(A-1))$，然后将$A-1$看成一个整体进行等价替换

回到本题：$\ln\cos\frac{\pi}{n}=\ln\left(1+\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)\right)\sim\cos\frac{\pi}{n}-1$

但现在我们依然看不出来原来通项的同阶无穷小是谁，而泰勒展开为我们提供了一个有利的工具

$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

则$\cos\frac{\pi}{n}-1=-\frac{1}{2!}\frac{\pi^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

于是$\cos\frac{\pi}{n}-1\sim-\frac{1}{2!}\frac{\pi^2}{n^2}$

于是$-\ln\cos\frac{\pi}{n}\sim\frac{1}{2!}\frac{\pi^2}{n^2}$,又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2!}\frac{\pi^2}{n^2}$收敛，则原级数收敛

为了让大家能看清楚公式中比较小的角标，我就尽量不把公式图片压缩小了，空白的地方大家自己跳过就好~

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

先提一句: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的意思是 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\times n}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n$ 而不是 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

或许你第一下会想到用根值判别法判断，但是得到的极限为1

根值判别法失效，那么我们就需要采取别的办法:对于本题而言，可以利用必要性去判断

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛的必要条件为:通项 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=0$

我们求一下通项的极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$，先取对数降低运算等级

$$\ln\frac{1}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n=n\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

求 $\lim_{n\to\infty}n\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 需要使用含皮亚诺余项的$Talor$展开:

$$\lim_{n\to\infty}n\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}n\left[n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{2}+o(1)=-\frac{1}{2}$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{-\frac{1}{2}}\neq 0$,则由必要性可得：原级数发散

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^{n+1}}$

这个题目主要是想为大家介绍$n!$的处理方法:

阶乘的计算我们都很熟悉，但是我们更想知道阶乘到底有多大?

斯特林公式给出了我们答案:

当n足够大时，$n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$，所以$n!$在量级上只有是可以和$n^n$相互匹敌的

回到本题：$\frac{e^n n!}{n^{n+1}}\sim\frac{e^n}{n^{n+1}}\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sim\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{n}}$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，则原级数发散

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

这个题目来源于教材习题解答交错级数那一节

乍一看其实看不出来这个通项和交错级数到底有什么联系

它其实需要一个巧妙的变形$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)$

现在就产生了交错级数的$(-1)^n$，我们再对sin中的式子进行变形，使用分子有理化技巧

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=\sin\left(\pi\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=\sin\left(\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$$

当n足够大时$\sin\left(\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)>0$，于是原级数就是个交错级数

又$\sin\left(\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$单调递减趋近于0

由$Leibniz$判别法知：原级数收敛

第一题主要是想涵盖全这里的可能的考察方向，所以要做对这道模拟题需要很大的知识储备量或者很好的运气(bushi，不过最主要的是帮助大家积累经验

2.设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n},(a>0)$在$x=2$处条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$在$x=-1$处($C$)

A.条件收敛　　B.绝对收敛　　C.发散　　D.无法确定其敛散性

这个题目考察的点是幂级数的收敛性质

幂级数在收敛区间内部收敛，并且绝对收敛，并且一致收敛

在收敛区间外部一定发散

于是，幂级数只有在区间端点处才可能条件收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在$x=2$处条件收敛，则$x=2$就是区间的端点

由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$,则$R=\frac{1}{1}=1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$的收敛区间为$(a-1,a+1)$

则$a-1=2$或$a+1=2$

则$a=3$或$a=1$

当$a=3$时$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-3)^n$

的收敛半径为1，其收敛区间为$(2,4)$则$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-3)^n$在$x=-1$处发散

当$a=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-1)^n$的收敛半径为1，其收敛区间为$(0,2)$，其在$x=-1$处发散

综上所述$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$在$x=-1$处发散

3. 下列函数在(0, 0)点处重极限存在但是累次极限不存在的为(C)

$A.f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ $\quad$ $B.f(x,y)=\frac{x^3+y}{x^2+y}$

$C.f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$ $\quad$ $D.f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$

先说说我做这种题的思路吧:

在求多元函数重极限的时候，我个人更喜欢使用极坐标换元

在(x,y)平面上，自由的变量有x,y两个，

我们令$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,转换到极坐标中时也应该有两个变量

那么就意味着ρ,θ都是变量于是我们就将$(x,y)\to(\rho,\theta)$

这种转换是恒等的变形，因此在极坐标上研究多元函数极限和在平面坐标上是等价的

值得注意的是原式中的$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$只需要变成$\lim\limits_{\rho\to 0}$，

化简后我们再考虑θ也是一个变量，考虑θ的变化是否会导致$\lim\limits_{\rho\to 0}$不存在

(具体做法会在题目中体现)

对此我们给出如下的定理:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),令\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases},则$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A\Leftrightarrow\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=A\text{对所有的}\theta\in[0,2\pi)\text{一致成立}$$

怎么理解“一致成立”，就是θ不仅可以取$[0,2\pi)$之内的数字，还可以取关于ρ的函数$\theta(\rho)$

比如可以取一个θ满足:$\sin\theta=\rho\cos^2\theta$,这时$\theta$会随着$\rho$的变化而变化

回忆我们学习一致收敛时候也是如此，

一致和逐点的区别就在于讨论一致的时候x可以取和n有关的值而讨论逐点的时候x只能取一个个确定的常数

这样就将二元同时变化的极限转换为了单变量ρ的极限，回归到了我们求一元极限的问题

但在研究累次极限的时候，我们就没有必要将其转换到极坐标中了

因为求累次极限本来就是求两次一元极限，本身就属于我们熟悉的一元极限问题。

$A.f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

我们先研究重极限：（令$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$我就不每次都写一遍了）

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta+\rho^2(\cos\theta-\sin\theta)^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta+\frac{(\cos\theta-\sin\theta)^2}{\rho^2}}$$

现在就要用到θ也是一个变量，即θ是一个可以变化的值

那么$\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta)^2}{\rho^2}$并不是一个恒定的值

那么原极限就更不可能是一个恒定的值了，因此重极限不存在

下面我们来研究累次极限：

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

先求$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，此时$x$就应该当做常数，而不是一个变量

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\dfrac{0}{0+x^2}=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}0=0$

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$,

先求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$,此时$y$就应该当做常数，而不是一个变量

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\dfrac{0}{0+y^2}=0$,则$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}0=0$

因此原函数累次极限是存在的

这个题也告诉我们：累次极限存在且相等，重极限都不一定存在

我们经常用的结论是：累次极限存在但不相等，重极限一定不存在

$B.f(x,y)=\dfrac{x^3+y}{x^2+y}$

先来研究重极限:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^3\theta+\rho\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho\sin\theta}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos^3\theta+\sin\theta}{\rho\cos^2\theta+\sin\theta}=\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{\rho\cos^3\theta+\frac{1}{\rho}\sin\theta}{\rho\cos^2\theta+\sin\theta}$$

取路径$L=\{(\rho,\theta)|\sin\theta=-\rho\cos^2\theta\}$那么

在这条路径上

$\rho\cos^3\theta+\dfrac{1}{\rho}\sin^3\theta$它不恒等于0

但是分母会取到0，也就是说$\dfrac{\rho\cos^3\theta+\frac{1}{\rho}\sin\theta}{\rho\cos^2\theta+\sin\theta}$这一项趋近于无穷的速度要多快有多快

因为分子不是0，但是分母可以取到“真0”所以在分子还不是0的时候，分母可以无限靠近0

这就造成了$\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\dfrac{\rho\cos^3\theta+\frac{1}{\rho}\sin\theta}{\rho\cos^2\theta+\sin\theta}$可能为0，可能为一个常数，可能为无穷

因此$\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\dfrac{\rho\cos^3\theta+\frac{1}{\rho}\sin\theta}{\rho\cos^2\theta+\sin\theta}$不存在，则重极限不存在。

当然你也可以找一个路径。具体如何构造路径会在串讲中提到。

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}x=0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{y\to 0}y^2=0$$

则该函数在$(0,0)$处重极限和累次极限都存在

$C.f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$

先分析重极限：

$\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\sin\frac{1}{\rho\sin\theta}+\rho\sin\theta\sin\frac{1}{\rho\cos\theta}$

值得注意的是，虽然$\sin\frac{1}{\rho\cos\theta},\sin\frac{1}{\rho\sin\theta}$中的$\frac{1}{\rho\cos\theta}$，$\frac{1}{\rho\sin\theta}$都趋近于无穷大

（一定要注意判断sin括号内的部分是趋近于0还是无穷大的，如果是无穷大时不可以用等价替换！）

但是$\sin\frac{1}{\rho\cos\theta}$，$\sin\frac{1}{\rho\sin\theta}$均有界，$\cos\theta\sin\frac{1}{\rho\sin\theta}$，$\sin\theta\sin\frac{1}{\rho\cos\theta}$也是有界的

而$\rho\to 0$,有界乘无穷小依然为无穷小，因此$\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\sin\frac{1}{\rho\sin\theta}+\rho\sin\theta\sin\frac{1}{\rho\cos\theta}=0$

先分析累次极限：

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$,因为$x\to 0$时，$x\sin\frac{1}{y}\to 0$,但$y\sin\frac{1}{x}$不存在，

故$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$不存在

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$，因为因为$y\to 0$时，$y\sin\frac{1}{x}\to 0$,但$x\sin\frac{1}{y}$不存在，

故$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$不存在

因此原函数在$(0,0)$处两个累次极限均不存在

$D.f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$

先分析重极限：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^3\theta+\rho^3\sin^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho\sin\theta}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos^3\theta+\rho^2\sin^3\theta}{\rho\cos^2\theta+\sin\theta}=\lim_{\rho\to 0}\rho^2\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{\rho\cos^2\theta+\sin\theta}$$

这里就要注意θ会对$\displaystyle\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos^3\theta+\rho^2\sin^3\theta}{\rho\cos^2\theta+\sin\theta}$的计算产生了影响

取路径$L=\{(\rho,\theta)|\sin\theta=-\rho\cos^2\theta\}$那么

在这条路径上

$\cos^3\theta+\sin^3\theta$不恒为0

但是分母会取到0，也就是说$\dfrac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{\rho\cos^2\theta+\sin\theta}$这一项趋近于无穷的速度要多快有多快

这就造成了$\displaystyle\lim_{\rho\to 0}\rho^2\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{\rho\cos^2\theta+\sin\theta}$可能为0，可能为一个常数，可能为无穷

因此$\displaystyle\lim_{\rho\to 0}\rho^2\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{\rho\cos^2\theta+\sin\theta}$不存在，则重极限不存在。

在分析累次极限

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{y\to 0}\frac{0+y^3}{0+y}=\lim_{y\to 0}y^2=0$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+0}{x^2+0}=\lim_{x\to 0}x=0$$

于是该函数在$(0,0)$处累次极限都存在

最后，其实这种题先讨论累次极限，在讨论重极限会好一些~，有时候我们可以

求出来两个累次极限存在但不相等，那么重极限一定不存在。

4.设$z=z(x,y)$是由方程$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$所确定的二元隐函数，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ (C)

$A.0$ $\qquad B.\dfrac{1}{2}$ $\qquad C.1$ $\qquad D.2$

$z=z(x,y)$是由$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$确定的函数，很明显z和x,y是不能分离的，这个问题就定位到隐函数求导问题

（其实也没有什么特别的，我们只需要在求导的时候时刻提醒自己z是关于(x,y)的函数就好）

对$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$方程两边对x求偏导

$2\cos(x+2y-3z)(1-3z_x)=1+0-3z_x=1-3z_x$

$\Rightarrow\ [2\cos(x+2y-3z)-1](1-3z_x)=0$

对$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$方程两边对y求偏导

$2\cos(x+2y-3z)(2-3z_y)=0+2-3z_y=2-3z_y$

$\Rightarrow\ [2\cos(x+2y-3z)-1](2-3z_y)=0$

于是我们得到$\begin{cases}[2\cos(x+2y-3z)-1](1-3z_x)=0\\ [2\cos(x+2y-3z)-1](2-3z_y)=0\end{cases}$

当$2\cos(x+2y-3z)=1$时

$\sin(x+2y-3z)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$或$\sin(x+2y-3z)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

则由$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z\ \Rightarrow\ x+2y-3z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

但$\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，于是$\sin(x+2y-3z)\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

则由$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z\ \Rightarrow\ x+2y-3z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

但$\sin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，于是$\sin(x+2y-3z)\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

于是$2\cos(x+2y-3z)\neq 1$

故$\begin{cases}1-3z_x=0\\ 2-3z_y=0\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}z_x=\dfrac{1}{3}\\ z_y=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

则$z_x+z_y=1$

5.下列点中是函数$f(x,y)=x^4+2y^4-2x^2-12y^2+6$的极大值点的是(C)

$A.(1,\sqrt{3})$　　　$B.(0,\sqrt{3})$　　　$C.(0,0)$　　　$D.(-1,-\sqrt{3})$

本题考察的是无约束条件下的极值点的判断

先求极值点：

$$\begin{cases} f_x=4x^3-4x=0 \\ f_y=8y^3-24y=0 \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} x=0,\ \pm 1 \\ y=0,\ \pm 3 \end{cases}$$

于是该函数有$3\times 3=9$个驻点

要判断这些驻点是极大值点，还是极小值点，还是它就不是极值点

需要求二阶偏导数

$f_{xx}=4(3x^2-1),f_{xy}=0,f_{yy}=24(y^2-1)$

$$H=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}=96(3x^2-1)(y^2-1)$$

我们利用如下结论：

①$H>0$时

$A>0$时，$f(x_0,y_0)$为极小值;$A<0$时，$f(x_0,y_0)$为极大值

②$A<0$时，$f(x_0,y_0)$不是极值

③$A=0$时，$f(x_0,y_0)$可能是极值，也可能不是极值

我们逐个代入求出的驻点后会发现：

$(0,0),(1,\sqrt{3}),(1,-\sqrt{3}),(-1,\sqrt{3}),(-1,-\sqrt{3})$满足$H>0$

它们是极值点

而其他的点，均不是极值点

再将极值点代入$f_{xx}=4(3x^2-1)$中验证，发现只有$(0,0)$满足$A=f_{xx}<0$

于是只有$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

二、 计算题

$$1.u=f\left(xy,\frac{x}{y}\right),\text{求}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

这个题目一般不会很难，考察的就是多元函数的链式求导法则

$$u=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$$

先求一阶偏导数

$$u_x=f_1y+f_2\frac{1}{y}$$

$$u_y=f_1x+f_2x\frac{-1}{y^2}=f_1x-\frac{x}{y^2}f_2$$

$$u_{yx}=(u_y)_x=\left(f_1x-\frac{x}{y^2}f_2\right)_x$$

这里需要注意的是虽然我们没有把f_1,f_2的完整形式写出来，但是大家要时刻记得

f_1代表$f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)$　　f_2代表$f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)$，他们都是关于$x$,关于$y$的函数，因此求导数时候要参与运算

$$\left(f_1x-\frac{x}{y^2}f_2\right)_x=(f_1)_x x+f_1-\frac{1}{y^2}f_2+\frac{x}{y^2}(f_2)_x$$

其中$(f_1)_x=f_{11}y+f_{12}\frac{1}{y}$　　$(f_2)_x=f_{21}y+f_{22}\frac{1}{y}$

有f具有二阶连续偏导数得$f_{12}=f_{21}$

代入可得：$u_{yx}=f_1-\frac{1}{y^2}f_2+xyf_{11}-\frac{x}{y^3}f_{22}$

$$u_{yy}=(u_y)_y=\left(f_1x-\frac{x}{y^2}f_2\right)_y=(f_1)_y x+\frac{2x}{y^3}f_2-\frac{x}{y^2}(f_2)_y$$

其中$(f_1)_y=f_{11}x-\frac{x}{y^2}f_{12}$　　$(f_2)_y=f_{21}x-\frac{x}{y^2}f_{22}$

代入可得:$u_{yy}=\frac{2x}{y^3}f_2+x^2f_{11}-\frac{2x^2}{y^2}f_{12}+\frac{x^2}{y^4}f_{22}$

补充：设函数$f(t)$具有二阶连续导数，$z=f(xy+z)$, 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

这个题目乍一看形式非常简单，但是非常容易做错

$z=f(xy+z)$

从$z=f$看来：z应该是关于x,y的函数

那么我们把z写成$z=z(x,y)$，大家就发现这个题目的易错点了

原方程变成了$z(x,y)=f(xy+z(x,y))$，所以这实际上是一个隐函数求导问题，

同样提醒大家：求导时候时刻提醒自己z是关于x,y的函数

对方程两侧同时对x求偏导数：

$$z_x=f'(xy+z)(y+z_x)\ \Rightarrow\ z_x=\frac{yf'(xy+z)}{1-f'(xy+z)}$$

$$z_y=f'(xy+z)(x+z_y)\ \Rightarrow\ z_y=\frac{xf'(xy+z)}{1-f'(xy+z)}$$

现在求下z_{xy},大家遇到繁琐的题目时候，一定不要想着一下子直接把答案得出来

分成好几步去写正确率会大大提高

$$z_{xy}=(z_x)_y=\left(\frac{yf'(xy+z)}{1-f'(xy+z)}\right)_y$$

$$=\frac{[yf'(xy+z)]_y[1-f'(xy+z)]-yf'(xy+z)[1-f'(xy+z)]_y}{(1-f'(xy+z))^2}$$

其中$[yf'(xy+z)]_y=1\cdot f'(xy+z)+y[f'(xy+z)]_y$

$=f'(xy+z)+y[f''(xy+z)(x+z_y)]$

$[1-f'(xy+z)]_y=-f''(xy+z)(x+z_y)$

其中$x+z_y=\dfrac{xf'(xy+z)+x-xf'(xy+z)}{1-f'(xy+z)}=\dfrac{x}{1-f'(xy+z)}$

代入可得：

$$z_{xy}=\frac{f'(xy+z)}{1-f'(xy+z)}+\frac{xyf''(xy+z)}{[1-f'(xy+z)]^2}+\frac{xyf'(xy+z)f''(xy+z)}{[1-f'(xy+z)]^3}$$

2.函数的$Fourier$级数展开

(1)将函数$f(x)=x(\pi-x),x\in[0,\pi]$展开为余弦函数

(2)求函数$f(x)=x\sin x,x\in[-\pi,\pi]$的傅里叶级数

展开成正弦级数或者余弦级数应该是考试最容易去考察的问题，

其实很好记：

①展开成正弦级数：

正弦是奇函数，那就先做奇延拓，再做周期延拓，另外a_n是和余弦有关的量,所以所有的$a_n=0$

②展开成余弦级数：

余弦是偶函数，那就先做偶延拓，再做周期延拓，另外b_n是和正弦有关的量,所以所有的$b_n=0$

（1）展开成余弦函数

那我们先写：将$f(x)$做偶延拓，再做周期延拓

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-x^2+\pi x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}+\left[\frac{\pi}{2}x^2\right]_0^{\pi}\right)=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-x^2+\pi x)\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-x^2)\cos nxdx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x)\cos nxdx$$，分别用分部积分公式

(此处不好描述...有时间来现场听我讲吧~)

$$=-\frac{2(1+(-1)^n)}{n^2}$$

所以有$f(x)\sim\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1+(-1)^n)}{n^2}\cos 2nx$

由傅里叶级数展开定理：

$$x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1+(-1)^n)}{n^2}\cos 2nx,x\in[0,\pi]$$

(2)这个题目的解答在课本习题解答84页

出这个题是为了告诉大家什么时候我们要将a_1单独拿出来讨论

首先a_0是我们每次都要单独分析的，b_0是恒等于0的

然后我们在求a_n, b_n时起先是并不知道需要先求a_1或者b_1的

我们就先直接去按照正常的思路直接求a_n

但是在求a_n的途中，我们遇到了

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin x \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \frac{1}{2}[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \,\mathrm{d}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left\{\left[x\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]\mathrm{d}x\right)$$

到这里我们就会发现$n=1$时$n-1$作为分母会导致分式无意义

因此我们在求出$a_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}$后需要补充一句：$n \geqslant 2$

接着在单独讨论$n=1$的时候a_1的值

b_n也是一样的道理

具体答案大家参照课本就可，我就不敲公式了呜呜

3.求过直线L：$\begin{cases}x-y+z=0\\x+2y+z=1\end{cases}$,与曲面$\Sigma$：$x^2+y^2-z^2=1$相切的平面方程

这种空间解析几何题目每年也都会有出现，

这道题目难度不是很大，如果不知道怎么联立方程的话建议大家手画一下图形就会比较清楚

无论是求平面方程还是求直线方程，最主要的还是求出平面的法向量和方向向量

我们先设所求平面和Σ相切于$M(x_0,y_0,z_0)$

那么曲面在M点的法向量为$\vec{n}=(2x_0,2y_0,-2z_0)$,同时这也是所求平面的法向量

于是现在问题就是如何求出x_0,y_0,z_0了

M点所在的平面过直线$\begin{cases}x-y+z=0\\x+2y+z=1\end{cases}$，我们先求出直线的方向向量为$\vec{l}=(-1,0,1)$

找到直线上一点$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$(其他点都可以，最方便的就是令其中一个变量为0，解出另外两个量了)

于是我们可以列出如下方程

$$\begin{cases}\left(x_0-\frac{1}{3},y_0-\frac{1}{3},z_0\right)\cdot(2x_0,2y_0,-2z_0)=0 \quad PM\perp\vec{n}\ ,\text{或者列}PM\parallel\vec{l}\text{都可以}\\(-1,0,1)\cdot(2x_0,2y_0,-2z_0)=0 \qquad \vec{l}\perp\vec{n}\\x_0^2+y_0^2-z_0^2=1 \qquad M\text{点在}\Sigma\text{上}\end{cases}$$

三个未知数，三个方程，我们解出

$$\begin{cases}x_0=2\\y_0=1\\z_0=-2\end{cases} \quad \text{或者} \begin{cases}x_0=4\\y_0=-1\\z_0=4\end{cases}$$

于是满足题意的平面方程有两个：

$2(x-2)+(y-1)-2(z+2)=0$

或$4(x-4)-(y+1)-4(z+4)=0$

4.求函数$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$在$(0,0)$点带皮亚诺余项的3阶$Talor$展开式

这个题目主要为为了解决大家$(1+x)^a$展开不熟悉的问题

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-(n-1))}{n!}x^n+\ldots$$

因为这个展开公式确实难记，所以我们专门为它设计了一个记号：

令$\dbinom{a}{n}=\dfrac{a(a-1)\ldots(a-(n-1))}{n!}$ ，

分母是从1一直乘到n,分子是$a-0$一直乘到$(a-(n-1))$

我们可以进一步把它写作为$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{a-(k-1)}{k}$

接着为了把第一项也包含进去,令$\dbinom{a}{0}=1$

于是$(1+x)^a$展开式可以写成$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,这样就好记了一些

本题中$a=-\dfrac{1}{2}$

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}t^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{-\frac{1}{2}-(k-1)}{k}\right)t^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-2(k-1)}{2k}\right)t^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\right)t^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)t^n$$

这就是$(1+t)^{-\frac{1}{2}}$的展开的通式

我们令$t=x^2+y^2$

得$(1+(x^2+y^2))^{-\frac{1}{2}}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)(x^2+y^2)^n$

然后就写到三阶就可以了：(展开到三阶的意思是泰勒展开导出三项)

$$(1+(x^2+y^2))^{-\frac{1}{2}}=1+(-1)\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{3}{8}(x^2+y^2)^2+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4$$

5.讨论函数列$f_n(x)=\dfrac{n+x^2}{nx}$在区间$(0,1)$上是否一致收敛

这个题目来源于大家的小测，属于是判断函数列是否一致收敛比较容易错的题目：

$f_n(x)=\dfrac{n+x^2}{nx}$,$x\in$（0,1）

我们第一步得先求出$f_n(x)$可能趋向的函数$f(x)$，这时候需要固定x对n求极限

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+x^2}{nx}=\frac{1}{x}$$

大家做错这道题目最主要的原因是想当然地认为$f_n(x)$趋近的函数$f(x)$是0

下面我们来讨论$f_n(x)$是否可以一致收敛到函数$f(x)$

这里我们定义一种距离，帮助大家理解：

定义$d(f_n(x),f(x))=|f_n(x)-f(x)|$

如果$f_n(x)$一致收敛到$f(x)$，那么在（0,1）中无论x去任何值，$d(f_n(x),f(x))$一定都是0

于是我们的目标只需要转向去证明 $\sup\limits_{x\in(0,1)}(d(f_n(x),f(x)))\to 0$

这也就是课本中给出的$\beta n=\sup\limits_{x\in(0,1)}|f_n(x)-f(x)|\to 0$。

我们先写出距离：$d(f_n(x),f(x))=\left|\dfrac{n+x^2}{nx}-\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{x^2}{nx}=\dfrac{x}{n}$

$$\sup_{x\in(0,1)}(d(f_n(x),f(x)))=\sup_{x\in(0,1)}\frac{x}{n},$$

不难发现：在$x\in$（0,1）中，无论x去任何值$\dfrac{x}{n}$都是一致趋近于0的

因此$f_n(x)=\dfrac{n+x^2}{nx}$在$x\in$（0,1）内一致收敛

三.已知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$条件收敛，讨论$p$的取值范围

一般这个大题都会考察如何去判断题目给出的数项级数是否收敛

这个题目属于是逆向地去考察大家对于数项级数收敛的理解：

其实研究的方法都是一样的。

题目告诉我们$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}$绝对收敛

也就是说$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^p}$ 收敛

在讨论绝对收敛的时候，加了绝对值运算后我们得到的级数就是正项级数了

那么就可以使用正项级数的方法：

$\sin\frac{1}{n^p}\sim\frac{1}{n^p}$

于是$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^p}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$同敛散,又$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^p}$收敛

则$p>1$

接着分析$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$，题目告诉我们它是条件收敛的

这就意味着$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$发散

而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$仍然是一个正项级数，

$\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\sim\frac{\sqrt{n}}{n^p}=\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$

则$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$同敛散,由$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$发散

得$p-\dfrac{1}{2}\leqslant 1 \Rightarrow\ p\leqslant\dfrac{3}{2}$

现在我们初步得到了p的范围为：$\left(1,\dfrac{3}{2}\right]$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{p}}\right)$属于$Leibniz$级数

我们只需分析$\sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{p}}\right)$的单调性的是否趋近于0即可：

令$f(n)=\sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{p}}\right),f'(n)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{p}}\right)+\sqrt{n}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n^{p}}}(-p)\dfrac{1}{n^{p+1}}$

$=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^{p}}\right)}{2\sqrt{n}}-\dfrac{2p}{2\sqrt{n}\,(n^{p}+1)}=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^{p}}\right)(n^{p}+1)-2p}{2\sqrt{n}\,(n^{p}+1)}$

其中分母恒大于0，

分子$=\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{p}}\right)(n^{p}+1)-2p\leqslant\dfrac{1}{n^{p}}(n^{p}+1)-2p=1+\dfrac{1}{n^{p}}-2p$

由$\lim\limits_{n\to\infty}1+\dfrac{1}{n^{p}}-2p=1-2p$,而$1<p\leqslant\dfrac{3}{2}$，于是$1-2p<0$

由极限的保号性，当$n>N$时，$1+\dfrac{1}{n^{p}}-2p\leqslant 0$

那么$f'(n)\leqslant 0$在$n>N$时恒成立，此时$f(n)$单调递减

又$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{p}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n^{p}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$,

当$p\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right],\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}=0$

由$Lebniz$判别法可知: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{p}}\right)$收敛

综上所述:p的取值范围为：$\left(1,\dfrac{3}{2}\right]$

四.设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},x^2+y^2\neq 0\\0\ \ ,x^2+y^2=0\end{cases}$$

(1)讨论函数在$(0,0)$点的连续性

(2)求函数在$(0,0)$点的偏导数，并讨论偏导数的连续性

(3)讨论函数在$(0,0)$点的可微性

这里其实和多元函数极限考察的知识都差不多，只是可能会多一些定义

(1)我们还是用极坐标的方法去分析:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\rho^2\cos\theta\sin\theta\sin\frac{1}{\rho}$$

其中$\cos\theta\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}$有界$\left(\text{注意}\sin\dfrac{1}{\rho}\text{不是无穷小，不可以等价替换}\right)$，$\rho^2$为无穷小

于是$\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^2\cos\theta\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}=0=f(0,0)$

则$f(x,y)$在$(0,0)$处连续

(2)

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

下面判断偏导数的连续性:

当$(x,y)\neq(0,0)$时

$$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

简单分析一下每个部分的情况:

$(x,y)\to(0,0)$趋近于0时，$y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$趋近于0

而$\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$中$\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$虽然有界，但$\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$不一定趋近于0

于是想到构造路径$y=x$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{\sqrt{2x^2}}-\frac{x^3}{2\sqrt{2}|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{x^3}{2\sqrt{2}|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2x^2}}\text{极限不存在}$$

于是$f_x(x,y)$在$(0,0)$处不连续

由于y和x具有轮换对称性，同理可得：$f_y(x,y)$在$(0,0)$处不连续

(3) 偏导数存在且连续我们可以得到函数在该点处可微

但是通过 (2) 的证明我们发现 f 在 $(0,0)$ 处偏导数存在但不连续

于是我们就要通过定义去证明 f 在 $(0,0)$ 处是否可微：

即我们只需要判断 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 是否恒为0即可

我们也可以通过极坐标换元去判断

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)-f_x(0,0)\rho\cos\theta-f_y(0,0)\rho\sin\theta}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta\sin\frac{1}{\rho}-0\cdot\rho\cos\theta-0\cdot\rho\sin\theta}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\sin\theta\sin\frac{1}{\rho}$$

由于 $\cos\theta\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}$ 有界，ρ 为无穷小量

因此 $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}=0$

则 f 在 $(0,0)$ 处可微，且 $df|_{(0,0)}=0$

五.证明:函数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上连续，且具有连续的导函数

这个题目属于是考察函数项级数性质中非常经典的题目:

大家在课本习题集59页可以看到本题的答案.

我在这里只补充下大家问过我的问题:

问题一:

证明可导时候课本给出的三个判定是这样的:

若区间$[a,b]$上函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$满足:

(1)$u'_n(x)$在$[a,b]$上连续

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛

(3)存在某个$x_0\in[a,b]$,使得$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛

但是在有的解答中不会出现第三个条件,

原因其实在于我们在证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$可导之前一般都会先证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$连续

在证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$连续的时候需要证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛

那么$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$一定逐点收敛,

因此，必然存在某个$x_0\in[a,b]$,使得$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛。因此有时候解答不会额外再写条件(3)

事实上，在陈纪修数分教程中给出逐项求导定理的判定是这样的:

设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$满足:

(1)$u'_n(x)$在$[a,b]$上连续

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛

(3)$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$点态收敛

这样就比较符合答案的写法了。我们的课本其实是对判定条件进行了弱化，只需要找到一点就可以了。

不过一般大家遇到的函数项级数都是很友好的，它就直接可以满足陈纪修教程中的这三个判定。

不过建议大家考试时候为了保险起见写一下条件(3)吧

问题二：

只要判断出函数项级数可导，是不是就可以得到函数项级数的导函数连续的结论

是的~

我们看三个判定条件：

(1) $u'_n(x)$在$[a,b]$上连续

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛

(3)存在某个$x_0 \in [a,b]$,使得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛

要判断$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$连续

就要根据函数项级数连续性的判断条件：$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛

这恰恰就是判断可导时候的条件(1)

这也说明了我们在判断函数项级数可导时使用的判定条件是非常强的

或许随着理论研究的深入，对这三个条件进行一定的弱化也不影响函数项级数的可导性

六.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{2n(2n-1)}$的收敛域与和函数

这个题目最主要的困难在于幂级数是缺项的，他没有偶次项

因此我们不能直接使用根值判别法和比值判别法求出极限后取倒数得到收敛半径

这时一般就有两种方法供我们选择:

①换元法: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{2n(2n-1)}$中我们先提取一个$x$出来

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{2n(2n-1)}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)}$,接着令$x^2=y,y\geqslant 0$

$x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}y^{n}}{2n(2n-1)}$，接着再结合$y\geqslant 0$分析$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}y^{n}}{2n(2n-1)}$就好

令$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)},\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}}\right|=1$

则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}y^{n}}{2n(2n-1)}$的收敛半径为$R=\frac{1}{1}=1$,则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}y^{n}}{2n(2n-1)}$收敛区间为$-1<y<1$

再结合$y\geqslant 0\Rightarrow 0\leqslant y<1$

$y=1$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}$为$Leibniz$级数，收敛;$y=0$时原级数显然收敛

则$0\leqslant y\leqslant 1$，即$0\leqslant x^2\leqslant 1$解得$-1\leqslant x\leqslant 1$

则原级数的收敛域为$[-1,1]$

②直接使用正项级数的比值判别法:

因为幂级数收敛则一定绝对收敛，于是我们可以用分析正项级数敛散性的方法判断幂级数的敛散性

我们就把x当作为待定的参数

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}}\right|=x^2$,当$x^2<1$时，级数收敛,当$x^2>1$时，级数发散

当$x=\pm 1$时，原级数为$Leibniz$级数，可判定其收敛

综上所述:原级数的收敛域为$[-1,1]$

(2)记$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)},x\in(-1,1)$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$S'(x)-S'(0)=\int_0^x S''(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=[\arctan x]_0^x=\arctan x$$

注意积分的时候是定积分因此左侧$S'(0)$不可缺少

在$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$中令$x=0\Rightarrow S'(0)=0$

则$S'(x)=\arctan x$

$$S(x)-S(0)=\int_0^x\arctan t\,\mathrm{d}t=\left[x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^x=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

(这一步用分部积分公式计算)

注意积分的时候是定积分因此左侧$S(0)$不可缺少

在$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)}$中令$x=0\Rightarrow S(0)=0$

则$S(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

在(2)中有一个细节:记$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)},x\in(-1,1)$

为什么我们第一问得到的收敛域为$[-1,1]$但这里我们却用的是开区间呢?

这个老师上课应该强调过:

幂级数求导之后得到的新的幂级数的收敛情况只会变得更差，不会变得更好

幂级数积分之后得到的新的幂级数的收敛情况只会变得更好，不会变的更差

但值得一提的是:这里的变差变好只能影响幂级数在端点处的敛散性，不会影响收敛区间内的敛散性

即在本题中只会影响到$x=\pm1$时的敛散性，不会影响到$(-1,1)$的敛散性

直观理解就是求导时候把x^n指数上的n分给了前面的a_n让a_n更难趋近于0了，

积分的时候从a_n的部分取了n给x^n，这就让a_n更容易趋近于0了

而我们在代入端点时候研究的就是前面数项级数的敛散性。

所以本题我们记$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)},x\in(-1,1)$，这样无论是求导还是积分

我们都可以保证$x\in(-1,1)$时，所得到的新的幂级数一定是收敛的

而如果我们刚开始记$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)},x\in[-1,1]$，

求导之后还得额外讨论新的幂级数的收敛域是否包含±1,但我们其实目标只是研究清楚$S(x)$就可以了

因此刚开始先设成$(-1,1)$最后只用分析$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)}$在$x=\pm1$的敛散性即可

七.当$x>0,y>0,z>0$时，求函数

$$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$$

在球面$x^2+y^2+z^2=6R^2$上的最大值.

并由此证明:当a,b,c为正实数时，成立不等式$ab^2c^3\leqslant 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$

拉格朗日中值定理最近几年一般都出现在最后一题，但其实难度并不是很大

这种题目就是题目直接告诉了我们目标函数还有约束条件的题型：

$$\begin{cases}\max \quad f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z \\ s.t. \quad x^2+y^2+z^2=6R^2\end{cases} \quad PS\text{：}s.t.\text{意思是}subject\ to\text{，服从于的意思}$$

x,y,z大于0这个条件我们就没必要写在$s.t.$ 后了，只需要求出极值点时候舍去不满足条件的极值点就好

接着构建拉格朗日函数

$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z-\lambda(x^2+y^2+z^2-6R^2)$，然后对各个变量求偏导数

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{1}{x}-2x\lambda=0 \\ L_y=\dfrac{2}{y}-2y\lambda=0 \\ L_z=\dfrac{3}{z}-2z\lambda=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-6R^2=0\end{cases} \quad \text{解得}\begin{cases}x^2=\dfrac{1}{2\lambda} \\ y^2=\dfrac{1}{\lambda} \\ z^2=\dfrac{3}{2\lambda} \\ x^2+y^2+z^2-6R^2=0\end{cases} \quad \text{则}\begin{cases}x=R \\ y=\sqrt{2}\,R \\ z=\sqrt{3}\,R\end{cases}$$

由于目标函数没有最小值，因此唯一的驻点$\left(R,\sqrt{2}\,R,\sqrt{3}\,R\right)$必定为最大值点

则 $\ln x+2\ln y+3\ln z\leqslant \ln R+2\ln\sqrt{2}\,R+3\ln\sqrt{3}\,R=\ln\left(6\sqrt{3}\,R^6\right)$

则$xy^2z^3\leqslant 6\sqrt{3}\,R^6$　　则$xy^2z^3\leqslant 6\sqrt{3}\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3$

则$x^2y^4z^6\leqslant 108\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^6$,取$a=x^2,b=y^2,c=z^2$可得:

$ab^2c^3\leqslant 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$

七的另外一种考法：

设n为正整数，$x,y>0$，用条件极值的方法证明：$\dfrac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$

这个题目就比较独特一些

题目并没有直接给出我们等式约束关系，而让我们采取条件极值(拉格朗日乘数法)的方法证明不等式

那么这个时候我们就需要自己去构建等式关系了。

考虑在$x+y=a>0$的条件下函数$f(x,y)=\dfrac{x^n+y^n}{2}$的最小值

那么我们将问题就转化为了：

$$\begin{cases}\min\ f(x,y)=\dfrac{x^n+y^n}{2}\\ s.t.\ \ x+y=a\end{cases}$$

构建拉格朗日函数：

$L(x,y,\lambda)=\dfrac{x^n+y^n}{2}+\lambda(x+y-a)$，然后对各个变量求偏导数：

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{n}{2}x^{n-1}+\lambda\\ L_y=\dfrac{n}{2}y^{n-1}+\lambda\\ L_\lambda=x+y-a=0\end{cases}\qquad 解得\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}\\ y=\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

由于在边界处$f(a,0)=f(0,a)=\dfrac{a^n}{2}$

而在驻点唯一的驻点处，$f\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)=\left(\dfrac{a}{2}\right)^n\leqslant\dfrac{a^n}{2}$

所以$f\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$就是在$x+y=a$条件下的最小值，于是有

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

本套模拟题未涵盖的知识点有欧几里得空间，方向导数求法等，大家可以自行在复习课本中关注这些知识。

另外，这个答案是编者周末两天纯手敲的，外加上有的题目是自创的，所以它们也是现写的。时间紧，DDL 重(ku ku..) 所以里面或许会有一些小错误，欢迎大家向我批评指正！

最后希望本套试题可以将我去年的一些思考分享给大家~祝大家期中考试顺利！