北京航空航天大学

2022－2023 学年

士嘉书院

第二学期期中考试复习模拟题

《 工科数学分析（2） 》

一. 单项选择

1.下列级数收敛的有( )个

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$ （3） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$ (4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)$

(5) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(-\ln\cos\frac{\pi}{n}\right)$ (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^{n+1}}$ (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

A. 3 B. 4

C. 5 D. 6

2.设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n},(a>0)$在$x=2$处条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$在$x=-1$处( )

A.条件收敛 B.绝对收敛 C.发散 D.无法确定其敛散性

3. 下列函数在(0,0)点处重极限存在但是累次极限不存在的为（）

$A.f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ $B.f(x,y)=\frac{x^3+y}{x^2+y}$

$C.f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$ $D.f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$

4.设$z=z(x,y)$是由方程$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$所确定的二元隐函数，则$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$( )

$A.0$ $B.\frac{1}{2}$ $C.1$ $D.2$

5.下列点中是函数$f(x,y)=x^4+2y^4-2x^2-12y^2+6$的极大值点的是( )

$A.\left(1,\sqrt{3}\right)$ $B.\left(0,\sqrt{3}\right)$ $C.(0,0)$ $D.\left(-1,-\sqrt{3}\right)$

二、 计算题

$1.u=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$,求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

补充：设函数 $f(t)$具有二阶连续导数，$z=f(xy+z)$, 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

2.函数的$Fourier$级数展开

(1)将函数$f(x)=x(\pi-x), x\in[0,\pi]$展开为余弦函数

(2)求函数$f(x)=x\sin x, x\in[-\pi,\pi]$的傅里叶级数

3.求过直线L：$\begin{cases}x-y+z=0\\x+2y+z=1\end{cases}$,与曲面$\varSigma$：$x^2+y^2-z^2=1$相切的平面方程

4.求函数$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$在$(0,0)$点带皮亚诺余项的3阶$Talor$展开式

5.讨论函数列$f_n(x)=\dfrac{n+x^2}{nx}$在区间$(0,1)$上是否一致收敛

三.已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^p}$绝对收敛$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^p}\right)$条件收敛，讨论$p$的取值范围

四.设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0\ \ , x^2+y^2=0 \end{cases}$$

(1)讨论函数在$(0,0)$点的连续性

(2)求函数在$(0,0)$点的偏导数，并讨论偏导数的连续性

(2)讨论函数在$(0,0)$点的可微性

五.证明:函数$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上连续，且具有连续的导函数

六.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{2n(2n-1)}$的收敛域与和函数

七.当$x>0,y>0,z>0$时，求函数

$$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$$

在球面$x^2+y^2+z^2=6R^2$上的最大值.

并由此证明:当a,b,c为正实数时，成立不等式$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$

七的另外一种考法：

设n为正整数，$x,y>0$，用条件极值的方法证明：$\dfrac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$